УДК 530.12

М. П. Бронштейн

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ[1]*

§ 1. Введение. § 2. Гамильтонов формализм и плоские волны. § 3. Перестановочные соотношения и собственные значения энергии. § 4. Немного мысленно поэкспериментируем! § 5. Взаимодействие с материей. § 6. Перенос энергии гравитационными волнами. § 7. Вывод ньютоновского закона тяготения.

§ 1. Введение

Отклонения пространственно-временного континуума от «евклидовости» могут характеризоваться, как известно, компонентами тензора Римана—Кристоффеля. Когда отклонения малы, это тензорное поле четвертого ранга может быть получено из симметричного тензорного поля второго ранга следующим образом:

$$(\mu\rho\nu\sigma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma}+\frac{\partial^2 h_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}-\frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho \partial x_\nu}-\frac{\partial^2 h_{\rho\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right), \tag{1}$$

где $h_{\mu\nu}$ — малое отклонение фундаментального метрического тензора от метрики Минковского $\Delta_{\mu\nu}$ ($\Delta_{00}=1$, $\Delta_{11}=\Delta_{22}=\Delta_{33}=-1$; $\Delta_{\mu\nu}=0$, если $\mu\neq\nu$). В силу этих обстоятельств мы рассматриваем мир как «евклидовский» с метрическим тензором $\Delta_{\mu\nu}$, а $(\mu\rho\nu\sigma)$ рассматриваем как компоненты заданного в этом плоском мире тензорного поля четвертого ранга. При этом $h_{\mu\nu}$ играют роль «потенциалов», величины которых могут быть связаны четырьмя дополнительными «калибровочными условиями»

$$[\alpha\alpha,\ \beta]=0 \quad (\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

---

[1] Более подробное изложение этой работы публикуется одновременно в «Журнале экспериментальной и теоретической физики». [*Бронштейн М.* ‹*П.*› Квантование гравитационных волн. — ЖЭТФ, 1936, т. 6, с. 195—236. Фрагменты этой большой статьи включены в сборник «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 433—445. — *Примеч. пер.*]

* *Bronstein M.* ‹*P.*› Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder. — Phys. Ztschr. der Sowjetunion, 1936, Bd. 9, S. 140—157/ **Пер. Г. Е. Горелика.**

(Здесь и в дальнейшем подразумевается правило суммирования для греческих индексов, так что, например, $A_{\alpha\alpha}$ означает $A_{00}-A_{11}-A_{22}-A_{33}$; это позволяет нам больше не заботиться о различии между ко- и контравариантными компонентами; $[\alpha\beta, \gamma]$ — обычное обозначение трехиндексного символа Кристоффеля).

Уравнения гравитации в пустом пространстве имеют вид

$$(\mu\rho\nu\rho)=0. \tag{3}$$

При учете «калибровочных условий» (2) они совершенно эквивалентны обычным волновым уравнениям для потенциалов

$$\Box h_{\mu\nu}=0. \tag{4}$$

В дальнейшем мы рассматриваем квантовомеханическую континуальную систему, для которой классические уравнения движения могут быть записаны в форме (4); при дополнительных условиях (2), которые, как мы покажем, совместимы с уравнением Шредингера для рассматриваемой квантовомеханической системы, эта система тождественна гравитационному полю в пустом пространстве. Эта трактовка является до некоторой степени аналогом фермиевского метода квантования электромагнитного поля: метод Ферми существенно связан с использованием калибровочно неинвариантного лагранжиана, и наш метод квантования гравитационного поля также опирается на использование величин, которые не являются (даже приближенно) инвариантами общей теории относительности.

§ 2. Гамильтонов формализм и плоские волны

Рассмотрим динамическую непрерывную среду с десятью полевыми величинами $h_{\mu\nu}$ ($\mu \leqslant \nu$), которые играют роль механических координат системы, и с плотностью лагранжевой функции

$$[\alpha\alpha, \beta][\beta\gamma, \gamma]-[\alpha\beta, \gamma][\alpha\gamma, \beta]+{}^1/_2[\alpha\alpha, \beta][\gamma\gamma, \beta].$$

Довольно сложные вычисления, которые мы для краткости здесь опускаем, показывают, что соответствующая плотность гамильтоновой функции имеет вид

$$2\left(p_{00}+\sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\right)^2-\frac{1}{4}\left(3p_{00}-\sum_l p_{ll}+2\sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_l\left(-p_{0l}+\frac{\partial h_{00}}{\partial x_l}+\sum_m \frac{\partial h_{ml}}{\partial x_m}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{n}\left(2p_{nn}+p_{00}-\sum_{l}p_{ll}+2\frac{\partial h_{0n}}{\partial x_n}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l<m}\left(p_{lm}+\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l}+\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_m}\right)^2+\frac{1}{8}\sum_{l}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x_l}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{lm}\left(\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_m}-\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l}\right)^2+\frac{1}{4}\sum_{lm}\frac{\partial h_{00}}{\partial x_l}\frac{\partial h_{mm}}{\partial x_l}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{l}\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\right)^2-\frac{1}{8}\sum_{m}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\sum_{l}h_{ll}\right)^2+\frac{1}{4}\sum_{lmn}\left(\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_m}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{lmn}\left(\frac{\partial h_{lm}}{\partial x_m}\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_n}-\frac{\partial h_{lm}}{\partial x_n}\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_m}\right),$$

где $p_{\alpha\beta}$ — импульсы, сопряженные механическим координатам $h_{\alpha\beta}$, и что соответствующие уравнения движения имеют вид (4). Здесь и в дальнейшем латинские индексы принимают лишь значения 1, 2, 3. Для простоты также скорость света принимается равной 1, а ньютоновская гравитационная постоянная — $1/16\,\pi$. (Читатель может легко проверить, что значение гравитационной постоянной именно таково, если сравнить наши формулы с формулами 58.1 и 59.4 в книге Эддингтона «Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung». B.: Spring.-Verl., 1925.)

Теперь проведем разложение в ряд Фурье

$$h_{\alpha\beta}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathfrak{k}\left[h_{\alpha\beta,\,\mathfrak{k}}e^{-i(\omega t-\mathfrak{k}\mathfrak{r})}+h^{+}_{\alpha\beta,\,\mathfrak{k}}e^{i(\omega t-\mathfrak{k}\mathfrak{r})}\right]$$

(где $\omega=|\mathfrak{k}|$). Вычисления показывают, что гамильтонова функция поля может быть записана при этом в форме

$$H=\int d\mathfrak{k}\,\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}}+\sum_{l}h^{+}_{ll,\,\mathfrak{k}}\right)\left(h_{00,\,\mathfrak{k}}+\sum_{l}h_{ll,\,\mathfrak{k}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l\neq m}\left(h_{lm,\,\mathfrak{k}}h^{+}_{lm,\,\mathfrak{k}}-h^{+}_{ll,\,\mathfrak{k}}h_{mm,\,\mathfrak{k}}\right)-2\sum_{l}h_{0l,\,\mathfrak{k}}h^{+}_{0l,\,\mathfrak{k}}\right\}. \quad (5)$$

(Последовательность сомножителей кажется на первый взгляд произвольной; но из последующего станет ясно, что это — единственная последовательность, которая позволяет при переходе к квантовой области избежать рассмотрения энергии нулевых колебаний [«Nullpunktsenergie»].)

Условия (2) после разложения Фурье принимают следующую форму:

$$\frac{1}{2}\omega\left(h_{00,\mathfrak{k}}+\sum_l h_{ll,\mathfrak{k}}\right)+\sum_l \mathfrak{k}_l h_{0l,\mathfrak{k}}=0,$$

$$\omega h_{0l,\mathfrak{k}}+\sum_m \mathfrak{k}_m h_{ml,\mathfrak{k}}+\frac{1}{2}\mathfrak{k}_l\left(h_{00,\mathfrak{k}}-\sum_m h_{mm,\mathfrak{k}}\right)=0 \tag{6}$$

$$(l=1,\ 2,\ 3).$$

Число независимых $h_{\mu\nu},\mathfrak{k}$ (при данном $\mathfrak{k}$) равно, следовательно, 10—4=6. Можно, однако, легко показать, что для многих вопросов, касающихся, например, переноса энергии гравитационными волнами, число независимых поляризаций еще меньше чем 6. Рассмотрим, например, случай $\mathfrak{k}\|z$. Условия (6) превращаются тогда в

$$h_{11,\mathfrak{k}}+h_{22,\mathfrak{k}}=h_{00,\mathfrak{k}}+2h_{03,\mathfrak{k}}+h_{33,\mathfrak{k}}=$$
$$=h_{01,\mathfrak{k}}+h_{31,\mathfrak{k}}=h_{02,\mathfrak{k}}+h_{32,\mathfrak{k}}=0. \tag{6'}$$

Энергия гравитационной волны с учетом (6′) может быть записана в форме

$$2d\mathfrak{k}\omega^2\left(h^+_{12,\mathfrak{k}}h_{12,\mathfrak{k}}+h^+_{11,\mathfrak{k}}h_{11,\mathfrak{k}}\right).$$

(К такой форме подынтегральное выражение (5) можно легко привести с помощью условий (6′), если все $h_{\mu\nu,\mathfrak{k}}$ и $h^+_{\mu\nu,\mathfrak{k}}$ коммутируют; но позднее мы увидим, что и в квантовой области, где $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{h}^+$ уже не коммутируют, справедлив подобный результат.) Мы можем, следовательно, не меняя энергии гравитационной волны, подчинить 10 амплитуд $h_{\mu\nu},\mathfrak{k}$, кроме условий (6), еще четырем условиям. Например, мы можем (также и в случае, когда $\mathfrak{k}$ не параллелен z) эти добавочные условия выбрать в следующей (релятивистски не инвариантной) форме:

$$h_{00,\mathfrak{k}}=h_{01,\mathfrak{k}}=h_{02,\mathfrak{k}}=h_{03,\mathfrak{k}}=0.$$

Таким образом, мы видим, между прочим, что для переноса энергии существенны только поперечные гравитационные волны, а именно с двумя независимыми поляризациями. Положение, однако, становится совсем другим, если речь идет не о переносе энергии, а, например, о гравитационном взаимодействии двух тяготеющих тел; ниже мы увидим, что для такого взаимодействия как раз продольные $h_{\mu\nu}$-волны имеют наибольшее значение.

§ 3. Перестановочные соотношения и собственные значения энергии

Перестановочные соотношения Гейзенберга—Паули гласят[2]:

$$[h_{\alpha\beta}(\mathfrak{r}),\ h_{\alpha'\beta'}(\mathfrak{r}')] = 0, \qquad [p_{\alpha\beta}(\mathfrak{r}),\ p_{\alpha'\beta'}(\mathfrak{r}')] = 0,$$
$$[p_{\alpha\beta}(\mathfrak{r}),\ h_{\alpha'\beta'}(\mathfrak{r}')] = \frac{h}{i}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}') \qquad (\alpha \leqslant \beta,\ \alpha' \leqslant \beta'). \tag{7}$$

После фурье-разложения мы получаем

$$[h_{\alpha\beta,\,\mathfrak{k}},\ h_{\alpha'\beta',\,\mathfrak{k}'}] = 0, \qquad [h^{+}_{\alpha\beta,\mathfrak{k}},\ h^{+}_{\alpha'\beta',\mathfrak{k}'}] = 0,$$
$$[h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}},\ h_{00,\,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}},\ h_{ll,\,\mathfrak{k}'}] =$$
$$= [h^{+}_{ll,\,\mathfrak{k}},\ h_{ll,\,\mathfrak{k}'}] = -\frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'),$$
$$[h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}},\ h_{0l,\,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{ll,\,\mathfrak{k}},\ h_{0m,\,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{0l,\,\mathfrak{k}},\ h_{mn,\,\mathfrak{k}'}] = 0,$$
$$[h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}},\ h_{lm,\,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{nn,\,\mathfrak{k}},\ h_{lm,\,\mathfrak{k}'}] = 0 \qquad (l \neq m),$$
$$[h^{+}_{ll,\,\mathfrak{k}},\ h_{mm,\,\mathfrak{k}'}] = \frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}') \qquad (l \neq m),$$
$$[h^{+}_{0l,\,\mathfrak{k}},\ h_{0m,\,\mathfrak{k}'}] = \frac{h}{2\omega}\,\delta_{lm}\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'),$$
$$[h^{+}_{lm,\,\mathfrak{k}},\ h_{pq,\,\mathfrak{k}'}] = -\frac{h}{2\omega}\,\delta_{lp}\delta_{mq}\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}') \qquad (l < m,\quad p < q). \tag{8}$$

Введем операторы

$$A = \frac{1}{2}\,\omega\left(h_{00,\,\mathfrak{k}} + \sum_{l} h_{ll,\,\mathfrak{k}}\right) + \sum_{l} \mathfrak{k}_l h_{0l,\,\mathfrak{k}},$$
$$B_l = \omega h_{0l,\,\mathfrak{k}} + \sum_{m} \mathfrak{k}_m h_{ml,\,\mathfrak{k}} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}_l\left(h_{00,\,\mathfrak{k}} - \sum_{m} h_{mm,\,\mathfrak{k}}\right).$$

Вычисления показывают, что вследствие (8) все восемь операторов A, B_l, A^{+}, B_l^{+} ($l=1, 2, 3$) перестановочны между собой. Но с гамильтоновой функцией (5) они не перестановочны, т. е. не являются интегралами движения. Однако можно легко показать, что скобки Пуассона каждого из этих опера-

[2] Здесь h означает $h/2\pi$.

торов и гамильтоновой функции, т. е. скорости изменения этих операторов, в частном случае, когда

$$A = B_l = A^+ = B_l^+ = 0,$$

все обращаются в нуль. Это означает, что условия (6) (и соответствующие сопряженные) совместимы друг с другом и с квантовомеханическими уравнениями движения.

Перестановочные соотношения (8), оператор Гамильтона (5) и дополнительные условия (6) (вместе с изложенным ниже подходом к взаимодействию между гравитационным полем и материей) образуют фундамент предложенной здесь квантовой теории гравитации. Следует заметить, что установление квантовомеханического оператора Гамильтона с помощью принципа соответствия никогда не может быть однозначным: всегда возможно изменить гамильтоновскую функцию добавлением дополнительных членов, обращающихся в нуль при $h \to 0$ (например, «спиновые члены» в теории электрона); даже релятивистских требований, вообще говоря, недостаточно, чтобы однозначно фиксировать эти «спиновые члены». Все же мы полагаем, что в теории гравитации добавление таких дополнительных членов излишне.

А теперь к вычислению собственных значений энергии! Оно совершается, как и в квантовой электродинамике, с помощью введения новых переменных ξ, удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$[\xi, \xi^+] = 1.$$

Тогда, как известно, собственные значения $\xi\xi^+$ равны $n+1$, а собственные значения $\xi^+\xi$ равны n, где n — положительное целое число или нуль.

Ввести такие ξ-переменные симметричным образом здесь не удается. Одно возможное решение проблемы выглядит так:

$$\frac{1}{2}\left(h_{00,\mathfrak{t}} + \sum_l h_{ll,\mathfrak{t}}\right) = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{t}}}\,\xi_{00,\mathfrak{t}} e^{i\omega t},$$

$$h_{11,\mathfrak{t}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{t}}}\left(\frac{\xi^+_{11,\mathfrak{t}}}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} + \frac{\xi_{22,\mathfrak{t}}}{\sqrt{3}} e^{i\omega t} + \xi_{33,\mathfrak{t}} e^{i\omega t}\right),$$

$$h_{22,\mathfrak{t}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{t}}}\left(\frac{\xi^+_{11,\mathfrak{t}}}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} + \frac{\xi_{22,\mathfrak{t}}}{\sqrt{3}} e^{i\omega t} - \xi_{33,\mathfrak{t}} e^{i\omega t}\right),$$

$$h_{33,\mathfrak{t}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{t}}}\left(\frac{\xi^+_{11,\mathfrak{t}}}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} - \frac{2}{\sqrt{3}}\xi_{22,\mathfrak{t}} e^{i\omega t}\right),$$

$$h_{lm,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\,\xi_{lm,\mathfrak{k}}e^{i\omega t} \qquad (l \neq m),$$

$$h_{0l,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\,\xi^{+}_{0l,\mathfrak{k}}e^{-i\omega t}.$$

Гамильтонова функция в новых переменных превращается в

$$H = \sum_{\mathfrak{k}} h\omega\big(\xi^{+}_{00,\mathfrak{k}}\xi_{00,\mathfrak{k}} + \xi_{12,\mathfrak{k}}\xi^{+}_{12,\mathfrak{k}} + \xi_{23,\mathfrak{k}}\xi^{+}_{23,\mathfrak{k}} + \xi_{13,\mathfrak{k}}\xi^{+}_{13,\mathfrak{k}} -$$
$$- \xi^{+}_{01,\mathfrak{k}}\xi_{01,\mathfrak{k}} - \xi^{+}_{02,\mathfrak{k}}\xi_{02,\mathfrak{k}} - \xi^{+}_{03,\mathfrak{k}}\xi_{03,\mathfrak{k}} - \xi_{11,\mathfrak{k}}\xi^{+}_{11,\mathfrak{k}} +$$
$$+ \xi^{+}_{22,\mathfrak{k}}\xi_{22,\mathfrak{k}} + \xi^{+}_{33,\mathfrak{k}}\xi_{33,\mathfrak{k}}\big).$$

Поэтому собственными значениями энергии (для каждого значения k) являются

$$h\omega\,(n_{00}+n_{12}+n_{23}+n_{31}-n_{01}-n_{02}-n_{03}-n_{11}+n_{22}+n_{33}+2),$$

где n_{00}, n_{12}, . . . — десять квантовых чисел ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Условия (6) делают это выражение положительно определенным. Чтобы это увидеть, рассмотрим опять случай $\mathfrak{k}\parallel z$. Из (6) мы тогда получаем следующие условия:

$$\xi_{00,\mathfrak{k}}e^{i\omega t} + \xi^{+}_{03,\mathfrak{k}}e^{-i\omega t} = 0, \qquad \xi^{+}_{01,\mathfrak{k}}e^{-i\omega t} + \xi_{13,\mathfrak{k}}e^{i\omega t} = 0,$$

$$\xi^{+}_{02,\mathfrak{k}}e^{-i\omega t} + \xi_{23,\mathfrak{k}}e^{i\omega t} = 0, \qquad \xi^{+}_{11,\mathfrak{k}}e^{-i\omega t} + \xi_{22,\mathfrak{k}}e^{i\omega t} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$n_{01} = n_{31} + 1, \quad n_{02} = n_{23} + 1, \quad n_{22} = n_{11} + 1, \quad n_{03} = n_{00} + 1.$$

Собственные значения энергии для данного $\mathfrak{k}$ становятся равными

$$h\omega\big(\xi^{+}_{12,\mathfrak{k}}\xi_{12,\mathfrak{k}} + \xi^{+}_{33,\mathfrak{k}}\xi_{33,\mathfrak{k}}\big) = h\omega\big(n_{12} + n_{33}\big).$$

Мы видим, следовательно, что энергия гравитационного поля состоит из положительных гравитационных квантов, причем по две поляризации для каждого волнового вектора $\mathfrak{k}$. Аналогично классическому случаю здесь также играют роль только поперечные гравитационные колебания: например, при $\mathfrak{k}\parallel z$ — h_{12}- и $^1/_2\,(h_{11}-h_{22})$-колебания.

При этом не возникает никаких «членов собственной энергии» [«Nullpunktsenergieglieder»], что удалось вследствие целесообразно выбранной последовательности сомножителей в выражении (5).

§ 4. Немного мысленно поэкспериментируем!

Чтобы лучше понять физическое содержание квантовой теории гравитационного поля, рассмотрим измерение какой-нибудь из встречающихся здесь полевых величин, например, трехиндексного символа Кристоффеля [00, 1]. Классические эйнштейновские уравнения движения в нашем случае гласят (все $h_{\mu\nu} \ll 1$):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial h_{01}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x} = [00,\ 1]. \tag{9}$$

По примеру Бора и Розенфельда [3] рассмотрим измерение пространственно-временно́го среднего значения [00, 1] в объеме V и на интервале времени T. Возьмем пробное тело объема V. Его масса ρV. Уравнение движения (9), которое действительно только тогда, когда скорость пробного тела мала по сравнению со скоростью света, делает возможным следующее измерение: измерим импульс пробного тела в начале и затем в конце временно́го интервала T, тогда искомое среднее значение равно по определению

$$\frac{(p_x)_{t+T} - (p_x)_t}{\rho V T}.$$

Измерение [00, 1], следовательно, связано с неопределенностью порядка

$$\Delta\,[00,\ 1] \approx \Delta\, p_x/\rho V T, \tag{10}$$

где Δp_x — неопределенность импульса. Пусть продолжительность измерения импульса — Δt (само собой разумеется, $\Delta t \ll T$); Δx — неопределенность координаты, связанная с измерением импульса. Неопределенность Δp_x состоит из двух членов: из обычного квантовомеханического члена $\hbar/\Delta x$ и из члена, связанного с гравитационным полем, которое создается самим пробным телом из-за его отдачи при измерении. В силу эйнштейновского уравнения гравитации $\Box h_{01} = \rho v_x$ неопределенность h_{01}, которая возникает вследствие неопределенной скорости отдачи $\Delta x/\Delta t$, должна быть порядка $\rho \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot \Delta t^2$. Из (9) видно, что соответствующая неопределенность [00, 1] имеет порядок $\rho\Delta x$, так что во время каждого измерения импульса возникает связанная с гравитационным полем дополнительная неопределенность импульса

[3] *Bohr N., Rosenfeld L.*— Dansk. Vidensk. Selskab., 1933, Bd. 12, S. 8.

порядка $\rho\Delta x\cdot\rho V\Delta t$. Чтобы облегчить сравнение с обычными единицами измерения, откажемся здесь (до конца данного параграфа) от нашего соглашения $c=1$, $G=1/16\pi$.

Для импульса получаем

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} + G\rho^2 V\Delta x\Delta t.$$

Можно показать (аналогично рассуждениям Бора и Розенфельда), что второй член может быть сделан сколь угодно малым по сравнению с первым. Но для наилучшего измерения [00, 1], по-видимому, целесообразнее привести Δp_x к минимуму, т. е. сделать, чтобы оба члена были одинакового порядка. Для этого Δx следует взять порядка

$$\Delta x \approx \frac{1}{\rho}\left(\frac{h}{GV\Delta t}\right)^{1/2}.$$

Для Δ[00, 1] получим

$$\Delta[00,\ 1] \geqslant \frac{h^{1/2}G^{1/2}\Delta t^{1/2}}{V^{1/2}T}. \tag{11}$$

Следовательно, абсолютно точное измерение поля тяготения было бы возможно в том случае, если было бы возможно сколь угодно быстрое измерение импульса. Однако два обстоятельства делают невозможным провести сколь угодно быстрое измерение импульса: во-первых, согласно самому определению измерения должно быть $\Delta x \leqslant V^{1/3}$, и это приводит к

$$\Delta t \geqslant \frac{h}{\rho^2 V^{5/3} G}.$$

Во-вторых, согласно теории относительности Δx никогда не может быть больше, чем $c\Delta t$; и это приводит к

$$\Delta t \geqslant \frac{h^{1/3}}{c^{2/3}\rho^{2/3}V^{1/3}G^{1/3}}.$$

Из (11) следует, что Δ [00, 1] никогда не может быть сделана меньше чем

$$\frac{h}{\rho T V^{4/3}} \quad \text{или} \quad \frac{h^{2/3}G^{1/3}}{c^{1/3}\rho^{1/3}V^{2/3}T}.$$

Из этих двух границ для случая легких пробных тел ($\rho V \leqslant \leqslant h^{1/2} c^{1/2}/G^{1/2}$, т. е. меньше примерно 0,01 мг) первая является единственно существенной. Для более тяжелых пробных тел существенной является вторая. Ясно, что для возможно более точного измерения $[00, 1]$ следует рекомендовать как раз тяжелое пробное тело, и это означает, что теоретически важна только вторая граница. Мы имеем окончательно

$$\Delta [00,\ 1] \geqslant \frac{h^{2/3} G^{1/3}}{c^{1/3} \rho^{1/3} V^{2/3} T}. \tag{12}$$

Таким образом, ясно, что в области, где все $h_{\mu\nu}$ малы по сравнению с 1 (это и есть значение слова «слабое» в названии этой работы), точность гравитационных измерений может быть увеличена сколь угодно высоко: так как в этой области явлений применимы приближенные линеаризованные уравнения (1) и, следовательно, справедлив также принцип суперпозиции, то всегда возможно сделать пробное тело сколь угодно большой плотности ρ. Отсюда мы делаем вывод, что в рамках специальной теории относительности (т. е. когда пространственно-временной континуум «евклидов») можно строить вполне последовательную квантовую теорию гравитации; такая попытка предпринимается в данной работе. Однако в области общей теории относительности, где отклонения от «евклидовости» могут быть сколь угодно велики, дело обстоит совсем по-другому. Ведь гравитационный радиус пробного тела $(G\rho V/c^2)$, служащего для измерения, никоим образом не должен превосходить его линейные размеры $(V^{1/3})$; отсюда возникает верхняя граница для его плотности $(\rho \leqslant \leqslant c^2/GV^{2/3})$. Следовательно, возможности измерения в этой области еще более ограничены, чем можно заключить из квантовомеханических перестановочных соотношений. Без глубокой переработки классических понятий кажется едва ли возможным распространить квантовую теорию гравитации также и на эту область.

§ 5. Взаимодействие с материей

Согласующееся с принципом соответствия выражение для энергии взаимодействия между гравитационным полем и материей может быть получено с помощью установленной В. Фоком [4] общерелятивистской формы дираковского волнового уравнения. Если все $h_{\mu\nu}$ малы по сравнению с 1, это уравнение для случая исчезающего электромагнитного поля можно записать в следующей форме:

$$\frac{h}{i} \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{3} e_l h_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \psi +$$

[4] *Fock V.* — Ztschr. Phys., 1929, Bd. 57, S. 261.

$$+\left(\frac{1}{8}\frac{h}{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial h_{00}}{\partial x_k}\alpha_k - m\beta\right)\psi = 0,$$

где

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1$$

и

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \rho_1\sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1\sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3, \quad \beta = \rho_3$$

(матрицы Дирака). Введем вместо четырехкомпонентной ψ-функции две двухкомпонентные функции χ и φ:

$$\psi_1 = \chi_1 e^{-imt/h}, \quad \psi_2 = \chi_2 e^{-imt/h}, \quad \psi_3 = \varphi_1 e^{-imt/h}, \quad \psi_4 = \varphi_2 e^{-imt/h},$$

так что при уменьшении скорости частицы χ обращается в нуль, а φ становится ее нерелятивистской волновой функцией. Из уравнения Шредингера для этих φ_x можно увидеть, что энергия взаимодействия между частицей и гравитационным полем имеет вид

$$V = \frac{m}{2}h_{00} + \frac{h}{i}\sum_k h_{0k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{h^2}{2m}\sum_{kl} h_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} -$$
$$-\frac{h^2}{4m}\sum_{kl}\frac{\partial h_{kl}}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{h}{4i}\sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l} + \frac{h^2}{4mi}\sum_{jklm}\sigma_j e_{jlm} \times$$
$$\times \frac{\partial h_{km}}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{h}{4}\sum_{jlm}\sigma_j e_{jlm}\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l},$$

где e_{jlm} — кососимметричный единичный тензор (т. е. $e_{123} = 1$ и e_{jlm} антисимметричен по каждой паре индексов). Если длина волны гравитационного возмущения достаточно велика, это выражение упрощается:

$$V = \frac{m}{2}h_{00} + \frac{h}{i}\sum_k h_{0k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{h^2}{2m}\sum_{kl} h_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}. \qquad (13)$$

Выражение (13) мы используем в дальнейшем. Заметим, что к выражению (13) для энергии взаимодействия приводят даже простые соображения, связанные с принципом соответствия и не использующие уравнения Дирака—Фока.

§ 6. Перенос энергии гравитационными волнами

Одно из простейших применений квантовой теории гравитации, описанной выше схематически, состоит в расчете излучения энергии, происходящего при испускании гравитационных волн материальными системами. Для этого мы используем условия (6) или (6′) вместе с $h\,00,\mathfrak{k}=h01,\mathfrak{k}=h02,\mathfrak{k}=h03,\mathfrak{k}=0$. В ξ-переменных (см. § 3) для случая $\mathfrak{k}\,\|\,z$ это дает

$$V=\frac{m}{8\pi}\sqrt{\frac{hd\mathfrak{k}}{\pi\omega}}\left\{\left[\xi\left(\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2\right)+2\eta\dot{x}_1\dot{x}_2\right]e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}+\right.$$
$$\left.+\left[\xi^+\left(\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2\right)+2\eta^+\dot{x}_1\dot{x}_2\right]e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\right\},\tag{14}$$

где для краткости записано $\dot{x}_k$ вместо $\dfrac{h}{mi}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, ξ и η — вместо ξ_{33} и ξ_{12}. Обозначим начальное и конечное состояния излучающей частицы через k и l, начальное и конечное состояния гравитационных собственных колебаний — через k' и l'. Для вероятности перехода в единицу времени квантовая механика дает известное выражение

$$\frac{2\pi}{h}\,\delta\left(E_l+E_{l'}-E_k-E_{k'}\right)\left|\left(kk'\,|\,V\,|\,ll'\right)\right|^2.$$

Используя известные значения матричных элементов осциллятора, мы получаем отсюда, что вероятность спонтанного излучения в единицу времени гравитационного кванта с данным $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k}\,\|\,z$) и с ξ-поляризацией равна

$$\frac{m^2}{32\pi^2}\,\frac{d\mathfrak{k}}{\omega}\left|\left(k\,|\,\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2\,|\,l\right)\right|^2\delta\left(E_l-E_k+h\omega\right),$$

а с η-поляризацией —

$$\frac{m^2}{32\pi^2}\,\frac{d\mathfrak{k}}{\omega}\left|\left(k\,|\,2\dot{x}_1\dot{x}_2\,|\,l\right)\right|^2\delta\left(E_l-E_k+h\omega\right).$$

Вероятность перехода $k\to l$ с одновременным излучением гравитационного кванта в раствор конуса $d\Omega$ ($\|z$) в единицу времени равна поэтому

$$\frac{d\Omega}{8\pi^2}\,\frac{m^2\omega}{h}\left\{\left|\left(k\left|\frac{\dot{x}_1^2-\dot{x}_2^2}{2}\right|l\right)\right|^2+\left|\left(k\,|\,\dot{x}_1\dot{x}_2\,|\,l\right)\right|^2\right\}.$$

Нетрудно обобщить это выражение для любого направления (не только $\|z$) и затем проинтегрировать его по всем направлениям. Расчет приводит к следующему результату: полная вероятность (в единицу времени) перехода $k\to l$ с одновременным излучением гравитационного кванта частоты $\omega=(E_k-E_l)/h$ равна

$$\frac{m^2\omega}{10\pi h}\left\{\sum_{pq}\left|\left(k\,|\,\dot{x}_p\dot{x}_q\,|\,l\right)\right|^2-\frac{1}{3}\left|\left(k\left|\sum_p\dot{x}_p^2\right|l\right)\right|^2\right\}.$$

Нетрудно обобщить это выражение на случай любой системы материальных частиц. Для энергии, которую такая система теряет в единицу времени в виде излучаемых гравитационных волн при переходе $k \to l$, мы получаем выражение

$$\frac{\omega^2}{10\pi}\left\{\sum_{pq}\left|\left(k\left|\sum m\dot{x}_p\dot{x}_q\right|l\right)\right|^2-\frac{1}{3}\left|\left(k\left|\sum_p\sum m\dot{x}_p^2\right|l\right)\right|^2\right\} \tag{15}$$

(знак суммы Σ без индексов означает суммирование по различным частицам). Эта формула является квантовым обобщением известного результата Эйнштейна.

В самом деле, эйнштейновское выражение для энергии, излучаемой в единицу времени в виде гравитационных волн (при $G=1/16\pi$), имеет вид [5]

$$\frac{1}{80\pi}\left\{\sum_{pq}\left(\frac{d^3}{dt^3}\sum mx_px_q\right)^2-\frac{1}{3}\left(\sum_p\frac{d^3}{dt^3}\sum mx_p^2\right)^2\right\}.$$

Если $I_{pq}=\sum mx_px_q$ представлено в виде ряда Фурье

$$I_{pq}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}I_{pq}^{(k)}e^{ik\omega_0 t},$$

то это классическое выражение для излучения энергии на частоте $\omega=k\omega_0$ обращается в

$$\frac{\omega^6}{40\pi}\left\{\sum_{pq}|I_{pq}^{(k)}|^2-\frac{1}{3}\left|\sum_p I_{pp}^{(k)}\right|^2\right\}. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\left(k\left|\sum\right|m\dot{x}_p\dot{x}_q\,|\,l\right)=\sum\sum_j\left(k\,|\sqrt{m}\,\dot{x}_p\,|\,j\right)\left(j\,|\sqrt{m}\,\dot{x}_q\,|\,l\right)=$$
$$=-\sum\sum_j m\,(k\,|\,x_p\,|\,j)\,(j\,|\,x_q\,|\,l)\,\omega_{kj}\omega_{jl}.$$

В области низких частот и больших квантовых чисел мы можем, как легко вычислить, например, для случая ротатора, вместо $2\omega_{kj}\omega_{jl}$ поставить ω^2 (ω равно излучаемой частоте), что дает приближенно

$$\left(k\left|\sum m\dot{x}_p\dot{x}_q\right|l\right)=-\frac{\omega^2}{2}(k\,|\,I_{pq}\,|\,l).$$

Тогда выражение (15) принимает вид

$$\frac{\omega^6}{40\pi}\left\{\sum_{pq}|(k\,|\,I_{pq}\,|\,l)|^2-\frac{1}{3}\left|\sum_p(k\,|\,I_{pp}\,|\,l)\right|^2\right\}.$$

[5] У самого Эйнштейна (Berl. Ber., 1918, S. 154) вследствие вычислительной ошибки вместо $1/80\pi$ стоит $1/160\pi$. Более поздние вычисления Эддингтона (см. его учебник или Proc. Roy. Soc., 1922, vol. 102, p. 281) привели к правильному коэффициенту.

Если мы вместо матричных элементов напишем фурье-амплитуды, последнее выражение переходит в классическое эйнштейновское (16). Таким образом, в пределе $h \to 0$ квантовая теория гравитации дает такие же результаты, как классическая теория Эйнштейна.

§ 7. Вывод ньютоновского закона тяготения

Дирак показал[6], что всякие взаимодействия между зарядами могут быть интерпретированы как происходящие посредством промежуточного агента, а именно квантованного поля. Здесь мы покажем, что подобная ситуация имеется также в области гравитационных явлений.

На первый взгляд это выглядит каким-то парадоксом, потому что оба выражения для взаимодействия между полем и материей почти в точности одинаковы ($e\Phi$ — главный член взаимодействия в случае электромагнетизма; если мы вместо заряда e напишем $m/2$ и скалярный потенциал Φ заменим на скалярный потенциал h_{00}, мы получим главный член в (13)), и все-таки одна и та же схема в одном случае должна объяснить отталкивание частиц одинакового вида (кулоновская сила), в другом случае — притяжение (ньютоновская сила). Решение парадокса состоит в том, что в квантовой электродинамике перестановочное соотношение для потенциала Φ имеет вид

$$\left[\Phi_{\mathfrak{k}}^{+},\ \Phi_{\mathfrak{k}'}\right] = \frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'),$$

в то время как у нас действует другое перестановочное соотношение, а именно (см. (8))

$$\left[h_{00,\,\mathfrak{k}}^{+},\ h_{00,\,\mathfrak{k}'}\right] = -\frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}').$$

Оба перестановочных соотношения не введены ad hoc, а следуют вполне естественно из общего квантовомеханического формализма. Этого достаточно, как мы увидим, для того, чтобы получить правильный знак гравитационного действия. *Так квантовомеханически объясняется фундаментальное различие между кулоновской и ньютоновской силами.*

Фок и Подольский[7], следуя идее Дирака, дали вывод

---

[6] *Dirac P. A. M.* — Proc. Roy. Soc., 1932, vol. 136, p. 453.
[7] *Fock V., Podolsky B.* — Sow. Phys., 1932, Bd. 1, S. 801 (Pt. II).

закона Кулона. Наши выкладки проходят точно параллельно выкладкам Фока—Подольского. Мы исходим из уравнений

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{m_1}{2}h_{00}(\mathfrak{r}_1)\right)\psi+\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t_1}=0,$$

$$\left(\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{m_2}{2}h_{00}(\mathfrak{r}_2)\right)\psi+\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t_2}=0.$$

При $t_1=t_2=t$

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=-\left(\frac{m_1}{2}h_{00}(\mathfrak{r}_1)+\frac{m_2}{2}h_{00}(\mathfrak{r}_2)\right)\psi.$$

Ищется разложение решения по степеням m_1 и m_2.

Вследствие указанного выше различия в перестановочных соотношениях мы вместо формул (39), (40) Фока и Подольского получаем следующие формулы:

$$-\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2\sim$$

$$\sim\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}}\int h_{00,\,\mathfrak{k}}\varphi_1\left(\mathfrak{p}_1-h\mathfrak{k},\ \mathfrak{p}_2\right)e^{-i\omega t}d\mathfrak{k}+$$

$$+\frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}}\int h_{00,\,\mathfrak{k}}\varphi_1\left(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2-h\mathfrak{k}\right)e^{-i\omega t}d\mathfrak{k};$$

$$-\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_1\sim$$

$$\sim\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}}\int h^+_{00,\,\mathfrak{k}}\varphi_0\left(\mathfrak{p}_1+h\mathfrak{k},\ \mathfrak{p}_2\right)e^{i\omega t}d\mathfrak{k}+$$

$$+\frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}}\int h^+_{00,\,\mathfrak{k}}\varphi_0\left(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2+h\mathfrak{k}\right)e^{i\omega t}d\mathfrak{k}.$$

Это дает [8]

$$\varphi_1\left(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2\right)=-\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}h^3}h^+_{00,\,\frac{\mathfrak{p}_1^0-\mathfrak{p}_1}{h}}\frac{\delta(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_2^0)\,\delta_{j0}}{W-W_0+|\mathfrak{p}_1^0-\mathfrak{p}_1|}\times$$

$$\times e^{i\frac{|\mathfrak{p}_1^0-\mathfrak{p}_1|-W_0}{h}t}-\frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}h^3}h^+_{00,\,\frac{\mathfrak{p}_2^0-\mathfrak{p}_2}{h}}\times$$

$$\times\frac{\delta(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_1^0)\,\delta_{j0}}{W-W_0+|\mathfrak{p}_2^0-\mathfrak{p}_2|}e^{i\frac{|\mathfrak{p}_2^0-\mathfrak{p}_2|-W_0}{h}t}.$$

---

[8] Обозначения см. в цитированной работе В. Фока и Б. Подольского.

Положим

$$h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}} h_{00,\,\mathfrak{k}'} \sim 0 \quad \text{и} \quad h_{00,\,\mathfrak{k}} h^{+}_{00,\,\mathfrak{k}'} \sim \frac{h}{2\omega} \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}').$$

После вычеркивания бесконечных членов самодействия получаем окончательно

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2 + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) \sim$$

$$\sim \frac{m_1 m_2}{4(2\pi)^{3/2} h} \frac{\delta(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1^0 + \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_2^0)\,\delta_{f0}}{|\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1^0|^2} e^{-\frac{i}{h} W_0 t}.$$

Знак правой части противоположен знаку в формуле (42) Фока—Подольского. Возвращаясь к конфигурационному пространству, мы получаем соответственно этому уравнение Шредингера с потенциальной энергией

$$-\frac{m_1 m_2}{16\pi\,|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|}.$$

И, таким образом, мы возвращаемся к ньютоновскому закону гравитации, уже как к необходимому следствию квантовой теории гравитации.

Физико-технический институт
и Физический институт Университета.
Ленинград, август 1935 г.