SOW. PHYS.

BAND 9 HEFT 2-3
1936

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT DER SOWJETUNION

HERAUSGEGEBEN
VOM VOLKSKOMMISSARIAT FÜR
SCHWERINDUSTRIE DER UdSSR

TECHNISCHER STAATSVERLAG CHARKOW

QUANTENTHEORIE SCHWACHER GRAVITATIONSFELDER.[1]

Von M. Bronstein.

(Eingegangen am 2. Januar 1936.)

§ 1. Allgemeines.

Die Abweichungen eines raumzeitlichen Kontinuums von der „Euklidizität" können bekanntlich durch die Komponenten des Riemann-Christoffelschen Tensors charakterisiert werden. Wenn diese Abweichungen klein sind, kann dieses Tensorfeld vierter Stufe aus einem symmetrischen Tensorfeld zweiter Stufe auf folgende Weise abgeleitet werden:

$$(\mu\rho\nu\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} + \frac{\partial^2 h_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 h_{\rho\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right), \qquad (1)$$

wo $h_{\mu\nu}$ ist die kleine Abweichung des fundamentalen metrischen Tensors von seinem Minkowskischen Wert $\Delta_{\mu\nu}$ ($\Delta_{00} = 1$, $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = -1$, $\Delta_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$). Unter diesen Umständen betrachten wir die Welt als eine „Euklidische" mit dem metrischen Tensor $\Delta_{\mu\nu}$ und die $(\mu\rho\nu\sigma)$ als die Komponenten eines in dieser ebenen Welt eingebetteten Tensorfeldes vierter Stufe. Dabei spielen die $h_{\mu\nu}$ die Rolle der „Potentiale", deren Werte durch vier zusätzliche „Eichungsbedingungen"

$$[\alpha\alpha, \beta] = 0 \qquad (\beta = 0, 1, 2, 3) \qquad (2)$$

fixiert werden können. (Hier, und im folgenden, bezieht sich die Summationsvorschrift nur auf griechische Indizes,

[1] Eine ausführlichere Fassung dieser Arbeit erscheint gleichzeitig im „Journal f. exp. und theor. Phys." (russisch).

und dabei in dem Sinne, dass $A_{\alpha\alpha}$ z. B. bedeutet $A_{00} - A_{11} - A_{22} - A_{33}$; dies erlaubt uns um den Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Komponenten nicht mehr zu kümmern; $[\alpha\beta, \gamma]$ ist die gewöhnliche Bezeichnung des Christoffelschen Dreiindizessymbols.)

Die Gravitationsgleichungen im leeren Raume sind

$$(\mu\rho\nu\rho) = 0. \tag{3}$$

Diese sind unter den „Eichungsbedingungen" (2) den gewöhnlichen Wellengleichungen für Potentiale

$$\Box\, h_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

vollständig äquivalent.

Im folgenden betrachten wir ein quantenmechanisches kontinuierliches System, dessen klassische Bewegungsgleichungen in der Form (4) geschrieben werden können; unter den zusätzlichen Bedingungen (2), die, wie wir zeigen werden, mit der Schrödingergleichung des betrachteten quantenmechanischen Systems verträglich sind, wird dieses System dem Gravitationsfeld im leeren Raume identisch. Diese Behandlungsweise ist der bekannten Fermischen Methode der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes gewissermassen analog: die Fermische Methode ist mit der Benutzung einer nicht-„eichinvarianten" Lagrangefunktion wesentlich verbunden, und so stützt sich auch unsere Methode der Quantisierung des Gravitationsfeldes auf die Benutzung von Grössen, die keine (sogar keine annähernden) Invarianten der allgemeinen Relativitätstheorie sind.

§ 2. Hamiltonsche Form und ebene Wellen.

Betrachten wir ein dynamisches Kontinuum mit zehn Feldgrössen $h_{\mu\nu}$ ($\mu \leqslant \nu$), die die Rolle der mechanischen Koordinaten des Systems spielen, und mit der Dichte der Lagrangeschen Funktion

$$[\alpha\alpha, \beta]\,[\beta\gamma, \gamma] - [\alpha\beta, \gamma]\,[\alpha\gamma, \beta] + \tfrac{1}{2}\,[\alpha\alpha, \beta]\,[\gamma\gamma, \beta].$$

Ziemlich komplizierte Rechnungen, die wir hier der Kürze halber weglassen, zeigen, dass die entsprechende Dichte der

Hamiltonschen Funktion

$$
\begin{aligned}
&2\left(p_{00}+\sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\right)^2-\frac{1}{4}\left(3p_{00}-\sum_l p_{ll}+2\sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\right)^2- \\
&-\frac{1}{2}\sum_l\left(-p_{0l}+\frac{\partial h_{00}}{\partial x_l}+\sum_m \frac{\partial h_{ml}}{\partial x_m}\right)^2+ \\
&+\frac{1}{4}\sum_n\left(2p_{nn}+p_{00}-\sum_l p_{ll}+2\frac{\partial h_{0n}}{\partial x_n}\right)^2+ \\
&+\frac{1}{2}\sum_{l<m}\left(p_{lm}+\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l}+\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_m}\right)^2+\frac{1}{8}\sum_l\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x_l}\right)^2- \\
&-\frac{1}{4}\sum_{lm}\left(\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_m}-\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l}\right)^2+\frac{1}{4}\sum_{lm}\frac{\partial h_{00}}{\partial x_l}\frac{\partial h_{mm}}{\partial x_l}-\frac{1}{2}\left(\sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\right)^2- \\
&-\frac{1}{8}\sum_m\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\sum_l h_{ll}\right)^2+\frac{1}{4}\sum_{lmn}\left(\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_m}\right)^2+ \\
&+\frac{1}{2}\sum_{lmn}\left(\frac{\partial h_{lm}}{\partial x_m}\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_n}-\frac{\partial h_{lm}}{\partial x_n}\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_m}\right)
\end{aligned}
$$

ist, wo $p_{\alpha\beta}$ die mit den mechanischen Koordinaten $h_{\alpha\beta}$ konjugierten Impulse sind, und dass die entsprechenden Bewegungsgleichungen (4) sind. Hier, wie auch im Folgenden, nehmen lateinische Indizes nur die Werte 1, 2, 3 an. Wir haben auch, der Einfachheit halber, die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 gesetzt, und die Newtonsche Gravitationskonstante gleich $1/16\pi$. (Den Wert der Gravitationskonstante kann der Leser leicht prüfen, wenn er unsere Formeln z. B. mit den Formeln 58.1 und 59.4 des Eddingtonschen Buches „Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung", Berlin, Springer 1925, vergleicht).

Führen wir nun die Fourierentwicklung

$$h_{\alpha\beta}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathfrak{k}\,[h_{\alpha\beta,\mathfrak{k}}\,e^{-i(\omega t-\mathfrak{k}\mathfrak{r})}+h^{+}_{\alpha\beta,\mathfrak{k}}\,e^{i(\omega t-\mathfrak{k}\mathfrak{r})}]$$

(wo $\omega=|\mathfrak{k}|$) ein. Die Rechnungen zeigen, dass die Hamiltonsche Funktion des Feldes dabei in der Form

$$H = \int d\mathfrak{k}\,\omega^2 \Big\{ \tfrac{1}{2} \big(h^+_{00,\mathfrak{k}} + \sum_l h^+_{ll,\mathfrak{k}}\big) \big(h_{00,\mathfrak{k}} + \sum_l h_{ll,\mathfrak{k}}\big) + $$
$$+ \sum_{l \neq m} (h_{lm,\mathfrak{k}}\, h^+_{lm,\mathfrak{k}} - h^+_{ll,\mathfrak{k}}\, h_{mm,\mathfrak{k}}) - 2 \sum_l h_{0l,\mathfrak{k}}\, h^+_{0l,\mathfrak{k}} \Big\} \tag{5}$$

geschrieben werden kann. (Die Reihenfolge der Faktoren scheint zunächst willkürlich; es ist aber aus dem folgenden klar, dass diese Reihenfolge die einzige ist, die bei der Übertragung auf das Quantengebiet die Vermeidung der „Nullpunktsenergie" gestattet.)

Die Bedingungen (2) nehmen nach der Fourierentwicklung die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,\omega\,\big(h_{00,\mathfrak{k}} + \sum_l h_{ll,\mathfrak{k}}\big) + \sum_l \mathfrak{k}_l h_{0l,\mathfrak{k}} = 0,\\ &\omega h_{0l,\mathfrak{k}} + \sum_m \mathfrak{k}_m h_{ml,\mathfrak{k}} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{k}_l \big(h_{00,\mathfrak{k}} - \sum_m h_{mm,\mathfrak{k}}\big) = 0\\ &\qquad (l = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Zahl der unabhängigen $h_{\mu\nu,\mathfrak{k}}$ (bei gegebenem $\mathfrak{k}$) ist also $10 - 4 = 6$. Man kann aber leicht zeigen, dass bei vielen Fragen, wo es sich z. B. um die Energieübertragung durch die Gravitationswellen handelt, die Zahl der unabhängigen Polarisationen noch kleiner als 6 ist. Betrachten wir z. B. den Fall $\mathfrak{k} \parallel z$. Die Bedingungen (6) werden dann zu

$$h_{11,\mathfrak{k}} + h_{22,\mathfrak{k}} = h_{00,\mathfrak{k}} + 2h_{03,\mathfrak{k}} + h_{33,\mathfrak{k}} = h_{01,\mathfrak{k}} + h_{31,\mathfrak{k}} =$$
$$= h_{02,\mathfrak{k}} + h_{32,\mathfrak{k}} = 0. \tag{6'}$$

Der Energiegehalt der Gravitationswelle kann, mit Berücksichtigung von (6′), in der Form

$$2d\mathfrak{k}\,\omega^2\,(h^+_{12,\mathfrak{k}}\,h_{12,\mathfrak{k}} + h^+_{11,\mathfrak{k}}\,h_{11,\mathfrak{k}})$$

geschrieben werden. (In solche Form kann man den Integrand von (5) mit Hilfe der Bedingungen (6′) leicht bringen, wenn alle $h_{\mu\nu,\mathfrak{k}}$ und $h^+_{\mu\nu,\mathfrak{k}}$ kommutativ sind; später werden wir aber sehen, dass auch im Quantengebiet, wo die h und die h^+ nicht mehr kommutativ sind, ein ähnliches Resultat gilt.) Wir können also ohne den Energiegehalt der Gravitationswelle zu ändern, die 10 Amplituden $h_{\mu\nu,\mathfrak{k}}$ ausser den Bedingungen (6) noch vier weiteren Bedingungen unterwerfen.

Z. B. können wir (auch wenn $\mathfrak{k}$ nicht $\parallel z$ ist) diese weiteren Bedingungen in der folgenden (zwar relativistisch nicht invarianten) Form wählen:

$$h_{00,\mathfrak{k}} = h_{01,\mathfrak{k}} = h_{02,\mathfrak{k}} = h_{03,\mathfrak{k}} = 0.$$

Wir sehen also u. a., dass für die Energieübertragung nur die transversalen Gravitationswellen, und zwar mit zwei unabhängigen Polarisationen, wesentlich sind. Die Sache steht aber ganz anders, wenn es sich nicht um die Energieübertragung, sondern z. B. um die Gravitationszusammenwirkung von zwei schweren Körpern handelt: unten werden wir sehen, dass für diese Zusammenwirkung gerade die longitudinalen $h_{\mu\nu}$-Wellen von allergrösster Bedeutung sind.

§ 3. Vertauschungsrelationen und Eigenwerte der Energie.

Die Heisenberg-Paulischen V.-R. lauten[1]

$$\left.\begin{aligned} &[h_{\alpha\beta}(\mathfrak{r}),\ h_{\alpha'\beta'}(\mathfrak{r}')] = 0, \\ &[p_{\alpha\beta}(\mathfrak{r}),\ p_{\alpha'\beta'}(\mathfrak{r}')] = 0, \\ &[p_{\alpha\beta}(\mathfrak{r}),\ h_{\alpha'\beta'}(\mathfrak{r}')] = \frac{h}{i}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}') \quad (\alpha \leqslant \beta,\ \alpha' \leqslant \beta'). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nach der Fourierentwicklung bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} &[h_{\alpha\beta,\mathfrak{k}},\ h_{\alpha'\beta',\mathfrak{k}'}] = 0, \quad [h^{+}_{\alpha\beta,\mathfrak{k}},\ h^{+}_{\alpha'\beta',\mathfrak{k}'}] = 0, \\ &[h^{+}_{00,\mathfrak{k}},\ h_{00,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{00,\mathfrak{k}},\ h_{ll,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{ll,\mathfrak{k}},\ h_{ll,\mathfrak{k}'}] = -\frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'), \\ &[h^{+}_{00,\mathfrak{k}},\ h_{0l,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{ll,\mathfrak{k}},\ h_{0m,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{0l,\mathfrak{k}},\ h_{mn,\mathfrak{k}'}] = 0, \\ &[h^{+}_{00,\mathfrak{k}},\ h_{lm,\mathfrak{k}'}] = [h^{+}_{nn,\mathfrak{k}},\ h_{lm,\mathfrak{k}'}] = 0 \quad (l \neq m), \\ &[h^{+}_{ll,\mathfrak{k}},\ h_{mm,\mathfrak{k}'}] = \frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}') \quad (l \neq m), \\ &[h^{+}_{0l,\mathfrak{k}},\ h_{0m,\mathfrak{k}'}] = \frac{h}{2\omega}\,\delta_{lm}\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'), \\ &[h^{+}_{lm,\mathfrak{k}},\ h_{pq,\mathfrak{k}'}] = -\frac{h}{2\omega}\,\delta_{lp}\delta_{mq}\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}') \quad (l < m,\ p < q). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[1] h bedeutet hier $h/2\pi$.

Wir führen die Operatoren

$$A = \tfrac{1}{2}\omega\,(h_{00,\mathfrak{k}} + \sum_l h_{ll,\mathfrak{k}}) + \sum_l \mathfrak{k}_l h_{0l,\mathfrak{k}},$$

$$B_l = \omega h_{0l,\mathfrak{k}} + \sum_m \mathfrak{k}_m h_{ml,\mathfrak{k}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{k}_l\,(h_{00,\mathfrak{k}} - \sum_m h_{mm,\mathfrak{k}}),$$

ein. Die Rechnung zeigt, dass infolge von (8) alle acht Operatoren A, B_l, A^+, B_l^+ $(l = 1, 2, 3)$ untereinander vertauschbar sind. Mit der Hamiltonschen Funktion (5) sind sie aber nicht vertauschbar, d. h. sie sind keine Bewegungsintegrale. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die Poissonklammern eines jeden dieser Operatoren und der Hamiltonschen Funktion, d. h. die Veränderungsgeschwindigkeiten dieser Operatoren, im speziellen Fall, wo

$$A = B_l = A^+ = B_l^+ = 0,$$

alle verschwinden. Das bedeutet, dass die Bedingungen (6) (und die entsprechenden adjungierten) miteinander und mit den quantenmechanischen Bewegungsgleichungen verträglich sind.

Die Vertauschungsrelationen (8), der Hamiltonsche Operator (5) und die Zusatzbedingungen (6) (zusammen mit dem später einzuführenden Ansatz für die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und Materie) bilden die Grundlage der hier vorgeschlagenen Quantentheorie der Gravitation. Es sei bemerkt, dass die Aufstellung eines quantenmechanischen Hamiltonschen Operators mit Hilfe des Korrespondenzprinzips niemals eindeutig sein kann: es ist immer möglich, die Hamiltonsche Funktion durch Hinzufügung der mit $h \to 0$ verschwindenden Zusatzglieder abzuändern (z. B. des „Spinglieds" in der Theorie des Elektrons); sogar die Relativitätsforderungen reichen im allgemeinen nicht aus, um diese „Spinglieder" eindeutig zu fixieren. Doch glauben wir, dass in der Gravitationstheorie die Hinzufügung solcher Zusatzglieder unnötig ist.

Nun zur Berechnung der Eigenwerte der Energie! Das geschieht wie in der Quantenelektrodynamik durch die Einführung der neuen Variablen ξ, die den V. R.

$$[\xi, \xi^+] = 1$$

genügen. Dann sind bekanntlich die Eigenwerte von $\xi\xi^+$ gleich $n+1$, und die von $\xi^+\xi$ gleich n, wo n eine positive ganze Zahl oder Null ist.

Hier gelingt es nicht, solche ξ-Variablen auf symmetrische Weise einzuführen. Eine mögliche Lösung des Problems sieht so aus

$$\frac{1}{2}\left(h_{00,\mathfrak{k}} + \sum_l h_{ll,\mathfrak{k}}\right) = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\, \xi_{00,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t},$$

$$h_{11,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\left(\frac{\xi^+_{11,\mathfrak{k}}}{\sqrt{3}}\, e^{-i\omega t} + \frac{\xi_{22,\mathfrak{k}}}{\sqrt{3}}\, e^{i\omega t} + \xi_{33,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t}\right),$$

$$h_{22,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\left(\frac{\xi^+_{11,\mathfrak{k}}}{\sqrt{3}}\, e^{-i\omega t} + \frac{\xi_{22,\mathfrak{k}}}{\sqrt{3}}\, e^{i\omega t} - \xi_{33,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t}\right),$$

$$h_{33,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h'}{2\omega d\mathfrak{k}}}\left(\frac{\xi^+_{11,\mathfrak{k}}}{\sqrt{3}}\, e^{\ \ i\omega t} - \frac{2}{\sqrt{3}}\, \xi_{22,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t}\right),$$

$$h_{lm,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\, \xi_{lm,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t}, \quad (l \neq m),$$

$$h_{0l,\mathfrak{k}} = \sqrt{\frac{h}{2\omega d\mathfrak{k}}}\, \xi^+_{0l,\mathfrak{k}}\, e^{-i\omega t}.$$

Die Hamiltonsche Funktion wird in den neuen Variablen zu

$$\left.\begin{aligned} H = \sum_k h\omega\, (\xi^+_{00,\mathfrak{k}}\xi_{00,\mathfrak{k}} + \xi_{12,\mathfrak{k}}\xi^+_{12,\mathfrak{k}} + \xi_{23,\mathfrak{k}}\xi^+_{23,\mathfrak{k}} + \xi_{13,\mathfrak{k}}\xi^+_{13,\mathfrak{k}} - \\ - \xi^+_{01,\mathfrak{k}}\xi_{01,\mathfrak{k}} - \xi^+_{02,\mathfrak{k}}\xi_{02,\mathfrak{k}} - \xi^+_{03,\mathfrak{k}}\xi_{03,\mathfrak{k}} - \xi_{11,\mathfrak{k}}\xi^+_{11,\mathfrak{k}} + \\ + \xi^+_{22,\mathfrak{k}}\xi_{22,\mathfrak{k}} + \xi^+_{33,\mathfrak{k}}\xi_{33,\mathfrak{k}}). \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Darum sind die Eigenwerte der Energie (für jeden Wert von $\mathfrak{k}$)

$$h\omega\,(n_{00} + n_{12} + n_{23} + n_{31} - n_{01} - n_{02} - n_{03} - n_{11} + n_{22} + n_{33} + 2),$$

wo n_{00}, $n_{12}, \ldots$ zehn Quantenzahlen sind ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Die Bedingungen (6) machen diesen Ausdruck positiv-definit. Um das einzusehen, betrachten wir wieder den Fall $\mathfrak{k} \parallel z$. Aus (6′) erhalten wir dann folgende Bedingungen:

$$\xi_{00,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t} + \xi^+_{03,\mathfrak{k}}\, e^{-i\omega t} = 0, \qquad \xi^+_{01,\mathfrak{k}}\, e^{-i\omega t} + \xi_{13,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t} = 0,$$

$$\xi^+_{02,\mathfrak{k}}\, e^{-i\omega t} + \xi_{23,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t} = 0, \qquad \xi^+_{11,\mathfrak{k}}\, e^{-i\omega t} + \xi_{22,\mathfrak{k}}\, e^{i\omega t} = 0.$$

Es folgt daraus, dass

$$n_{01} = n_{31} + 1, \quad n_{02} = n_{23} + 1, \quad n_{22} = n_{11} + 1, \quad n_{03} = n_{00} + 1.$$

Die Eigenwerte der Energie für diesen $\mathfrak{k}$ werden zu

$$h\omega\,(\xi^{+}_{12,\mathfrak{k}}\,\xi_{12,\mathfrak{k}} + \xi^{+}_{33,\mathfrak{k}}\,\xi_{33,\mathfrak{k}}) = h\omega\,(n_{12} + n_{33}).$$

Wir sehen also, dass die Energie des Gravitationsfeldes aus den positiven Gravitationsquanten besteht, und zwar von je zwei Polarisationen für jeden Wellenvektor $\mathfrak{k}$. Analog zu dem klassischen Fall spielen auch hier nur die transversalen Gravitationsschwingungen eine Rolle: z. B. für $\mathfrak{k} \parallel z$ eine h_{12}- und eine $\frac{1}{2}(h_{11} - h_{22})$-Schwingung.

Dabei entstehen keine „Nullpunktsenergieglieder": das ist infolge einer zweckmässig gewählten Reihenfolge der Faktoren im Ausdruck (5) gelungen.

§ 4. Ein wenig Gedankenexperimentieren!

Um den physikalischen Inhalt der Quantentheorie des Gravitationsfeldes etwas näher zu verstehen, betrachten wir die Messung einer der hier vorkommenden Feldgrössen, z. B. des Christoffelschen Dreiindizessymbols [00,1]. Die klassischen Bewegungsgleichungen Einsteins lauten in unserem Fall (alle $h_{\mu\nu} \ll 1$):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial h_{01}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x} - [00,1]. \tag{9}$$

Nach dem Vorbilde von Bohr und Rosenfeld[1] betrachten wir die Messung eines raumzeitlichen Mittelwertes von [00,1] im Volumen V und in dem Zeitintervall T. Nehmen wir einen Probekörper vom Volumen V. Seine Masse sei ρV. Die obere Bewegungsgleichung, die nur dann gilt, wenn die Geschwindigkeit des Probekörpers klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist, macht die folgende Messung möglich: messen wir den Impuls des Probekörpers am Anfang und dann am Ende eines Zeitintervalls T, so ist der gesuchte

[1] N. Bohr und L. Rosenfeld, Dansk. Vidensk. Selskab., Math.-fys. Meddel. **12**, 8. 1933.

Mittelwert definitionweise gleich

$$\frac{(p_x)_{t+T} - (p_x)_t}{\rho V T}.$$

Die Messung von [00,1] ist daher mit einer Unbestimmtheit verbunden von der Grössenordnung

$$\Delta [00,1] \approx \Delta p_x / \rho V T, \tag{10}$$

wo Δp_x die Unbestimmtheit des Impulses ist. Die Dauer der Impulsmessung sei Δt (selbstverständlich ist $\Delta t \ll T$); Δx sei die mit der Impulsmessung verbundene Unbestimmtheit der Koordinate. Die Unbestimmtheit Δp_x besteht aus zwei Gliedern: aus dem gewöhnlichen quantenmechanischen Glied $h/\Delta x$ und aus einem Glied, das mit dem Gravitationsfeld verknüpft ist, das von dem Probekörper selbst wegen seines Rückstosses bei der Messung erzeugt wird. Wegen der Einsteinschen Gravitationsgleichung $\Box h_{01} = \rho v_x$ muss die Unbestimmtheit von h_{01}, die infolge der unbestimmten Rückstossgeschwindigkeit $\Delta x / \Delta t$ entsteht, von der Grössenordnung $\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t^2$ sein. Es ist aus (9) ersichtlich, dass die entsprechende Unbestimmtheit von [00,1] von der Grössenordnung $\rho \Delta x$ ist, und damit während jeder Impulsmessung eine mit dem Gravitationsfeld verbundene zusätzliche Impulsunbestimmtheit von der Grössenordnung $\rho \Delta x \cdot \rho V \Delta t$ entsteht. Um den Vergleich mit den gewöhnlichen Messeinheiten zu erleichtern, sehen wir hier (bis zum Ende dieses Paragraphs) von unserer Vorschrift $c = 1$, $G = 1/16\pi$ ab. Wir erhalten für den Impuls

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} + G \rho^2 V \Delta x \Delta t.$$

Es kann gezeigt werden (analog zu den Überlegungen von Bohr und Rosenfeld), dass das zweite Glied gegenüber dem ersten beliebig klein gemacht werden kann. Für die beste Ausführung der [00,1]-Messung scheint es aber zweckmässiger, Δp_x zum Minimum zu machen, d.h. für die beiden Glieder die gleiche Grössenordnung zu schaffen. Dazu soll Δx von der Grössenordnung

$$\Delta x \approx \frac{1}{\rho}\left(\frac{h}{G V \Delta t}\right)^{1/3}$$

gewählt werden. Für $\Delta[00,1]$ erhalten wir

$$\Delta\,[00,1] \gtrsim \frac{h^{1/3} G^{1/3} \Delta t^{1/3}}{V^{1/3} T}. \tag{11}$$

Eine absolut genaue Messung des Schwerefeldes wäre also dann möglich, wenn eine beliebig schnelle Impulsmessung möglich wäre. Zwei Umstände machen es aber unmöglich, eine beliebig schnelle Impulsmessung auszuführen: erstens soll nach der Definition der Messung $\Delta x \ll V^{1/3}$ sein, und das führt zu

$$\Delta t \gg \frac{h}{\rho^2 G V^{5/3}}.$$

Zweitens kann nach der Relativitätstheorie niemals Δx grösser als $c\Delta t$ werden; und das führt zu

$$\Delta t \gtrsim \frac{h^{1/3}}{c^{2/3} \rho^{2/3} V^{1/3} G^{1/3}}.$$

Es folgt nach (11), dass niemals $\Delta\,[00,1]$ kleiner als

$$\frac{h}{\rho T V^{4/3}} \quad \text{oder} \quad \frac{h^{2/3} G^{1/3}}{c^{1/3} \rho^{1/3} V^{2/3} T}$$

gemacht werden kann. Von diesen beiden Grenzen ist für den Fall eines leichten Probekörpers ($\rho V \lesssim h^{1/2} c^{1/2} / G^{1/2}$, d. h. kleiner als etwa 0,01 mgr) die erste die einzige wesentliche. Für einen schwereren Probekörper ist die zweite die wesentlichste. Es ist klar, dass für eine möglichst genaue $[00,1]$-Messung gerade schwere Probekörper zu empfehlen sind, und das bedeutet, dass nur die zweite Grenze theoretisch wichtig ist. Wir haben schliesslich

$$\Delta\,[00,1] \gtrsim \frac{h^{2/3} G^{1/3}}{c^{1/3} \rho^{1/3} V^{2/3} T}. \tag{12}$$

Es ist also klar, dass im Gebiet, wo alle $h_{\mu\nu}$ klein gegen 1 sind (das ist gerade die Bedeutung des Wortes „schwach“ im Titel dieser Arbeit), die Genauigkeit der Schweremessungen beliebig hoch gesteigert werden kann: denn in diesem Erscheinungsgebiet gelten die angenäherten linearisierten Gleichungen (1), es gilt also auch das Superpositionsprinzip, und es ist daher immer möglich, einen Probekörper mit beliebig hohem ρ zu beschaffen. Daraus schliessen wir, dass es möglich ist, wie es z. B. diese Arbeit zu tun versucht, im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie (d. h. wenn das raumzeitliche Kontinuum ein „Euklidisches“ ist) eine durchaus konsequente Quantentheorie der Gravitation aufzubauen. Im Gebiet der allgemeinen Relativitätstheorie, wo die Abweichungen von der „Euklidizität“ beliebig gross sein können, steht aber die Sache ganz anders. Denn der Gravitationsradius des zur Messung dienenden Probekörpers ($G\rho V/c^2$) soll keineswegs grösser als seine linearen Abmessungen ($V^{1/3}$) sein; daraus entsteht eine obere Grenze für seine Dichte ($\rho \lesssim c^2/GV^{2/3}$). Die Messungsmöglichkeiten sind also in diesem Gebiet noch mehr beschränkt, als es sich aus den quantenmechanischen V.-R. schliessen lässt. Ohne eine tiefgehende Umarbeitung der klassischen Begriffe scheint es daher wohl kaum möglich, die Quantentheorie der Gravitation auch auf dieses Gebiet auszudehnen.

§ 5. Wechselwirkung mit der Materie.

Ein korrespondenzmässig richtiger Ansatz für die Energie der Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und Materie kann aus der von V. Fock[1] aufgestellten allgemeinrelativistischen Form der Diracschen Wellengleichung gewonnen werden. Wenn alle $h_{\mu\nu}$ klein gegen 1 sind, kann man diese Gleichung für den Fall des verschwindenden elektromagnetischen Feldes in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{h}{i}\sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{3} e_l h_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l}\right)\psi + \\ + \left(\frac{1}{8}\frac{h}{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial h_{00}}{\partial x_k}\alpha_k - m\beta\right)\psi = 0,$$

[1] V. Fock, ZS. f. Phys. 57, 261, 1929.

wo

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1$$

und

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \rho_1\sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1\sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3, \quad \beta = \rho_3$$

(Diracsche Matrizen). Führen wir statt der vierkomponentigen ψ-Funktion zwei zweikomponentige Funktionen χ und φ ein

$$\psi_1 = \chi_1 e^{-imt/h}, \ \psi_2 = \chi_2 e^{-imt/h}, \ \psi_3 = \varphi_1 e^{-imt/h}, \ \psi_4 = \varphi_2 e^{-imt/h},$$

so wird bei abnehmender Geschwindigkeit des Teilchens χ gleich Null, und φ zu seiner nichtrelativistischen Wellenfunktion. Es lässt sich aus der Schrödingergleichung für diese φ_x ersehen, dass die Energie der Wechselwirkung zwischen dem Teilchen und dem Gravitationsfeld die Form

$$V = \frac{m}{2} h_{00} + \frac{h}{i} \sum_k h_{0k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{h^2}{2m} \sum_{kl} h_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{h^2}{4m} \sum_{kl} \frac{\partial h_{kl}}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} +$$
$$+ \frac{h}{4i} \sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l} + \frac{h^2}{4mi} \sum_{jklm} \sigma_j e_{jlm} \frac{\partial h_{km}}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{h}{4} \sum_{jlm} \sigma_j e_{jlm} \frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l}$$

hat, wo e_{jlm} der schiefsymmetrische Einheitstensor ist (d. h. $e_{123} = 1$ und e_{jlm} ist in Bezug auf jedes Paar seiner Indizes antisymmetrisch). Wenn die Wellenlänge der Gravitationsstörungen genügend gross ist, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$V = \frac{m}{2} h_{00} + \frac{h}{i} \sum_k h_{0k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{h^2}{2m} \sum_{kl} h_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \qquad (13)$$

Den Ansatz (13) werden wir im folgenden benutzen. Es sei bemerkt, dass sogar die einfachen korrespondenzmässigen Betrachtungen, ohne den Umweg über die Dirac-Focksche Gleichung, auch zum Ansatz (13) für die Wechselwirkungsenergie führen.

§ 6. Energieübertragung durch die Gravitationswellen.

Eine der einfachsten Anwendungen der oben skizzierten Quantentheorie der Gravitation besteht in der Berechnung der Energieausstrahlung in Form der von materiellen Systemen emittierten Gravitationswellen. Hier sollen wir von den Bedingungen (6) oder (6′) zusammen mit $h_{00,\mathfrak{k}} = h_{01,\mathfrak{k}} = h_{02,\mathfrak{k}} = h_{03,\mathfrak{k}} = 0$ Gebrauch machen. In den ξ-Variablen (siehe oben, § 3) liefert das für den Fall $\mathfrak{k} \parallel z$

$$V = \frac{m}{8\pi}\sqrt{\frac{h\,d\mathfrak{k}}{\pi\omega}}\left\{[\xi(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + 2\eta\,\dot{x}_1\dot{x}_2]\,e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} + \right.$$

$$\left. + [\xi^+(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + 2\eta^+\dot{x}_1\dot{x}_2]\,e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\right\}, \tag{14}$$

wo der Kürze halber $\dot{x}_k$ statt $\dfrac{h}{mi}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ geschrieben ist, und ξ und η statt ξ_{33} und ξ_{12}. Nennen wir den Anfangs- bzw. den Endzustand des emittierenden Teilchens k bzw. l, den Anfangszustand bzw. den Endzustand der Gravitationseigenschwingung k' bzw. l'. Die Quantenmechanik liefert für die Wahrscheinlichkeit des Überganges pro Zeiteinheit den bekannten Ausdruck

$$\frac{2\pi}{h}\delta(E_l + E_{l'} - E_k - E_{k'})\,|(kk'\,|\,V\,|\,ll')|^2.$$

Mit Benutzung der bekannten Werte der Oszillatorenmatrixelemente schliessen wir daraus, dass die Wahrscheinlichkeit der spontanen Ausstrahlung eines Gravitationsquants pro Zeiteinheit mit einem gegebenen $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} \parallel z$) und mit der ξ-Polarisation

$$\frac{m^2}{32\pi^2}\frac{d\mathfrak{k}}{\omega}\,|(k\,|\,\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2\,|\,l)|^2\,\delta(E_l - E_k + h\omega)$$

ist, und mit der η-Polarisation:

$$\frac{m^2}{32\pi^2}\frac{d\mathfrak{k}}{\omega}\,|(k\,|\,2\dot{x}_1\dot{x}_2\,|\,l)|^2\,\delta(E_l - E_k + h\omega).$$

Die Wahrscheinlichkeit des Überganges $k \to l$ mit der gleichzeitigen Emission eines Gravitationsquantes in die Öffnung eines Kegels $d\Omega$ ($\parallel z$) pro Zeiteinheit ist daher

$$\frac{d\Omega}{8\pi^2}\frac{m^2\omega}{h}\left\{\left|\left(k\left|\frac{\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2}{2}\right|l\right)\right|^2 + |(k\,|\,\dot{x}_1\dot{x}_2\,|\,l)|^2\right\}.$$

Es ist nicht schwierig, diesen Ausdruck für eine beliebige Richtung (nicht nur $\parallel z$) zu verallgemeinern, und dann über alle Richtungen zu integrieren. Die Rechnung führt zu dem folgenden Ergebnis: die totale Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit) des Überganges $k \to l$ mit gleichzeitiger Emission eines Gravitationsquantes von der Frequenz $\omega = (E_k - E_l)/h$ ist

$$\frac{m^2 \omega}{10 \pi h} \left\{ \sum_{pq} |(k \,|\, \dot{x}_p \dot{x}_q \,|\, l)|^2 - \tfrac{1}{3} |(k \,|\, \sum_p \dot{x}_p^2 \,|\, l)|^2 \right\}.$$

Es ist nicht schwierig, diesen Ausdruck auch auf ein beliebiges System materieller Teilchen zu verallgemeinern. Für die Energie, die ein solches System in der Form der beim Übergang $k \to l$ pro Zeiteinheit emittierten Gravitationswellen verliert, erhalten wir einen Ausdruck

$$\frac{\omega^2}{10\pi} \left\{ \sum_{pq} |(k \,|\, \sum m \dot{x}_p \dot{x}_q \,|\, l)|^2 - \tfrac{1}{3} |(k \,|\, \sum_p \sum m \dot{x}_p^2 \,|\, l)|^2 \right\} \tag{15}$$

(das Summenzeichen Σ ohne Indizes bedeutet die Summation über verschiedene Teilchen). Diese Formel ist eine quantentheoretische Verallgemeinerung des bekannten Einsteinschen Resultats.

In der Tat lautet der Einsteinsche Ausdruck für die in der Form der Gravitationswellen pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie (bei $G = 1/16\pi$)

$$\frac{1}{80\pi} \left\{ \sum_{pq} \left(\frac{d^3}{dt^3} \sum m x_p x_q \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_p \frac{d^3}{dt^3} \sum m x_p^2 \right)^2 \right\}.$$ [1]

Wenn $I_{pq} \equiv \sum m x_p x_q$ durch eine Fourierreihe von der Form

$$I_{pq} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{pq}^{(k)} e^{ik\omega_0 t}$$

darstellbar ist, so wird dieser klassische Ausdruck für die Ausstrahlung der Energie in der Frequenz $\omega = k\omega_0$ zu

$$\frac{\omega^6}{40\pi} \left\{ \sum_{pq} |I_{pq}^{(k)}|^2 - \tfrac{1}{3} |\sum_p I_{pp}^{(k)}|^2 \right\}. \tag{16}$$

[1] Bei Einstein selbst (Berl. Ber. 1918, S. 154) steht infolge eines Rechenfehlers $1/160\pi$ statt $1/80\pi$. Die späteren Rechnungen Eddingtons (vgl. sein Lehrbuch oder Proc. Roy. Soc. 102, 281, 1922) führen zu dem richtigen Koeffizienten.

Auf der anderen Seite haben wir

$$(k|\sum m\dot{x}_p\dot{x}_q|l) = \sum\sum_j (k|\sqrt{m}\dot{x}_p|j)(j|\sqrt{m}\,\dot{x}_q|l) =$$

$$= -\sum\sum_j m\,(k|x_p|j)(j|x_q|l)\,\omega_{kj}\omega_{jl}.$$

Im Gebiet niedriger Frequenzen und hoher Quantenzahlen können wir, wie man es z. B. für den Fall eines Rotators leicht berechnet, ω^2 statt $2\omega_{kj}\omega_{jl}$ setzen (ω = der ausgestrahlten Frequenz), und das liefert näherungsweise

$$(k|\sum m\dot{x}_p\dot{x}_q|l) = -\frac{\omega^2}{2}(k|I_{pq}|l).$$

Dann wird der Ausdruck (15) zu

$$\frac{\omega^6}{40\pi}\left\{\sum_{pq}|(k|I_{pq}|l)|^2 - \tfrac{1}{3}|\sum_p (k|I_{pp}|l)|^2\right\}.$$

Wenn wir statt der Matrixelemente Fourieramplituden schreiben, geht dieser letzte Ausdruck in den klassischen Einsteinschen (16) über. Im Grenzfall $h \to 0$ liefert also die Quantentheorie der Gravitation dieselben Resultate wie die klassische Theorie Einsteins.

§ 7. Herleitung des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

Dirac hat gezeigt,[1] dass allerlei Wechselwirkungen zwischen Ladung und Ladung immer als durch Vermittelung eines intermediären Agens, nämlich des quantisierten Feldes, realisiert interpretiert werden können. Wir werden hier zeigen, dass eine ähnliche Situation auch im Gebiet der Gravitationserscheinungen vorliegt. Zunächst klingt es etwas paradox, denn die beiden Ausdrücke der Wechselwirkung zwischen Feld und Materie sind fast genau gleich [$e\Phi$ ist das Hauptglied der Wechselwirkung im elektromagnetischen Fall; wenn wir statt der Ladung e $m/2$ schreiben und das skalare Potential Φ durch das skalare Potential h_{00} ersetzen, erhalten wir das Hauptglied von (13)], und dennoch soll ein und das-

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **136**, 453, 1932.

selbe Schema in einem Fall die Abstossung von Partikeln gleicher Art (Coulombkräfte), im anderen Fall aber die Anziehung (Newtonkräfte) erklären. Die Lösung des Paradoxons besteht darin, dass in der Quantenelektrodynamik die V.-R. für das Potential Φ

$$[\Phi_{\mathfrak{k}}^{+}, \Phi_{\mathfrak{k}'}] = \frac{h}{2\omega}\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')$$

lauten, indem bei uns eine andere V.-R., nämlich

$$[h_{00,\mathfrak{k}}^{+}, h_{00,\mathfrak{k}}] = -\frac{h}{2\omega}\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')$$

gilt [vgl. (8)]. Beide V.-R. sind nicht ad hoc eingeführt, sondern ganz natürlich aus dem allgemeinen quantenmechanischen Formalismus entstanden. Dies genügt, wie wir sehen werden, um das richtige Vorzeichen der Gravitationswirkungen zu erhalten. Damit ist der fundamentale Unterschied zwischen Coulomb- und Newtonkräften quantenmechanisch erklärt.

Fock und Podolsky[1] haben, die Idee Diracs verfolgend, eine Herleitung des Coulombschen Gesetzes gegeben. Unsere Rechnung läuft der Fock-Podolskyschen genau parallell. Wir gehen von den Gleichungen

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2 + \frac{m_1}{2}h_{00}(\mathfrak{x}_1)\right)\psi + \frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t_1} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2 + \frac{m_2}{2}h_{00}(\mathfrak{x}_2)\right)\psi + \frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t_2} = 0$$

aus. Bei $t_1 = t_2 = t$ haben wir

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2 + \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = -\left(\frac{m_1}{2}h_{00}(\mathfrak{x}_1) + \frac{m_2}{2}h_{00}(\mathfrak{x}_2)\right)\psi.$$

Die Entwicklung der Lösung nach den Potenzen von m_1 und m_2 wird gesucht.

Infolge des oben besprochenen Unterschieds in den V.-R. erhalten wir, statt der Formeln (39) und (40) von Fock und

[1] V. Fock und B. Podolsky, Sow. Phys. 1, 801, 1932 (Part II).

Podolsky, die folgenden Formeln:

$$-\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2\sim$$

$$\sim\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}}\int h_{00,\mathfrak{k}}\,\varphi_1(\mathfrak{p}_1-h\mathfrak{k},\mathfrak{p}_2)\,e^{-i\omega t}\,d\mathfrak{k}+$$

$$+\frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}}\int h_{00,\mathfrak{k}}\,\varphi_1(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2-h\mathfrak{k})\,e^{-i\omega t}\,d\mathfrak{k};$$

$$-\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_1\sim$$

$$\sim\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}}\int h^{+}_{00,\mathfrak{k}}\,\varphi_0(\mathfrak{p}_1+\mathfrak{k}h,\mathfrak{p}_2)\,e^{i\omega t}\,d\mathfrak{k}+$$

$$+\frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}}\int h^{+}_{00,\mathfrak{k}}\,\varphi_0(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2+h\mathfrak{k})\,e^{i\omega t}\,d\mathfrak{k}.$$

Das liefert[1]

$$\varphi_1(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2)=$$

$$=-\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}h^3}\,h^{+}_{00,\frac{\mathfrak{p}_1^0-\mathfrak{p}_1}{h}}\,\frac{\delta(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_2^0)\,\delta_{j0}}{W-W_0+|\mathfrak{p}_1^0-\mathfrak{p}_1|}\,e^{i\frac{|\mathfrak{p}_1^0-\mathfrak{p}_1|-W_0}{h}t}-$$

$$-\frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}h^3}\,h^{+}_{00,\frac{\mathfrak{p}_2^0-\mathfrak{p}_2}{h}}\,\frac{\delta(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_1^0)\,\delta_{j0}}{W-W_0+|\mathfrak{p}_2^0-\mathfrak{p}_2|}\,e^{i\frac{|\mathfrak{p}_2^0-\mathfrak{p}_2|-W_0}{h}t}.$$

Setzen wir

$$h^{+}_{00,\mathfrak{k}}\,h_{00,\mathfrak{k}}\sim 0\quad\text{und}\quad h_{00,\mathfrak{k}}\,h^{+}_{00,\mathfrak{k}}\sim\frac{h}{2\omega}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}').$$

Nach der Streichung der unendlichen Selbstwirkungsglieder erhalten wir endlich

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathfrak{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathfrak{p}_2^2+\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sim$$

$$\sim\frac{m_1m_2}{4(2\pi)^{3/2}h}\,\frac{\delta(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_1^0+\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_2^0)\,\delta_{j0}}{|\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_1^0|^2}\,e^{-\frac{i}{h}W_0t}.$$

Das Vorzeichen der rechten Seite ist ein anderes als in der Fock-Podolskyschen Formel (42). Wenn wir zum Konfi-

[1] Wegen der Bezeichnungen siehe V. Fock und B. Podolsky, loc. cit.

gurationsraum zurückgehen, erhalten wir demgemäss eine Schrödingergleichung mit der potentiellen Energie

$$-\frac{m_1 m_2}{16\pi\,|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|},$$

und wir haben also das Newtonsche Gravitationsgesetz als eine notwendige Folgerung der Quantentheorie der Gravitation wiedergefunden.

Physikalisch-technisches Institut
und Physikalisches Institut der Universität.
Leningrad, August 1935.