ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. СЕРИЯ А

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОТВЕТСТВЕННЫЕ РЕДАКТОРЫ:
АКАД. А. Ф. ИОФФЕ И
АКАД. Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОМОЩНИК РЕДАКТОРА
Ю. Б. ХАРИТОН

ТОМ 6
ВЫП. 3

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ СЕКТОР НАРКОМТЯЖПРОМА СССР
УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ НАРКОМПРОСА РСФСР

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1936 МОСКВА

ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТОМ 6 1936 ВЫПУСК 3

КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

М. Бронштейн

Построена последовательная квантовая теория слабых гравитационных полей. Поле тяготения в пустоте рассматривается как квантово-механическая система; вводятся релятивистски-инвариантные перестановочные соотношения. Гравитационное взаимодействие материальных тел устанавливается через посредство промежуточного агента — „гравитационных квантов". Рассмотрены два физических приложения теории: 1) расчет потерь энергии материальными системами вследствие испускания гравитационных волн и 2) вывод ньютоновского закона всемирного тяготения.

I. Классическая теория

1. Уравнение гравитационного поля

Предметом теории гравитационных волн является случай гравитационного поля настолько слабого, что нарушение квазиэвклидовского характера четырехмерного пространственно-временного континуума можно считать чрезвычайно малым. В этом случае возможно ввести систему отсчета, свойства которой весьма мало отличаются от свойств обыкновенных лоренцовых систем отсчета. Обозначая время через $t = x_0$, а прямоугольные пространственные координаты через x_1, x_2, x_3, мы можем положить компоненты метрического фундаментального тензора равными

$$g_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где числа $\Delta_{\mu\nu}$ имеют обычные значения, соответствующие квазиэвклидовскому континууму Минковского:

$$\Delta_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right. \tag{2}$$

(фундаментальная скорость принята за единицу), а все числа $h_{\mu\nu}$ малы по сравнению с единицей (причем $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$).

В этом случае уравнения теории тяготения приобретают приближенно линейный характер и легко могут быть проинтегрированы в общем виде.

Основанная на этом замечании теория гравитационных волн была построена автором общей теории относительности. *

Существенной чертой теории гравитационных волн является то обстоятельство, что в области применимости этой теории гравитационное поле может рассматриваться как поле, существующее в квазиэвклидовском пространстве—времени (подобно электромагнитному полю в специальной теории отно-

* A. Einstein, Berl. Ber. 1916, стр. 688; ibid. 1918, стр. 154.

сительности), а не как нарушение квазиэвклидовского характера этого пространства — времени.

Предложенный Эйнштейном метод описания слабого гравитационного поля малыми величинами $h_{\mu\nu}$ имеет при всей своей простоте тот существенный недостаток, отмеченный Эддингтоном,* что при пользовании этим методом весьма трудно отделить „реальные" гравитационные волны, соответствующие нарушению квазиэвклидовского характера пространства — времени от „фиктивных" гравитационных волн, возникающих при введении произвольно осциллирующих координатных систем. Эддингтон высказал тот взгляд, что „реальный" характер имеют лишь поперечные гравитационные волны Эйнштейна (TT—волны по терминологии Эддингтона), распространяющиеся всегда с фундаментальной скоростью, в то время как волны, имеющие продольный характер (LL—волны), равно как и обладающие более сложным характером симметрии продольно-поперечные волны (LT—волны), распространяющиеся с произвольной скоростью, всегда „фиктивны", т. е. могут быть устранены целесообразным изменением координатной системы.

Любопытно отметить, что этим же замечанием впоследствии воспользовался Ландау,** который указал на обстоятельство, не замечаемое большинством физиков, что поперечный характер „реальных" гравитационных волн, повидимому, исключает возможность нарушения закона сохранения энергии в материальных системах, хотя бы и не подчиняющихся общей теории относительности (например, в системах, подчиняющихся „релятивистской теории квант"). В самом деле, изменение энергии (и, следовательно, массы) такой системы должно привести к распространению гравитационных волн в окружающем пустом пространстве, подчиняющемся обыкновенной („не квантовой") общей теории относительности; эти волны, на основании соображений симметрии, должны иметь продольный характер, а это исключается уравнениями закона тяготения в пустом пространстве. Этот качественный аргумент Ландау, впрочем, до сих пор не получил более подробного количественного обоснования.

В настоящей главе, которая должна служить введением к квантовой теории гравитационных волн, развиваемой в следующих главах, уместно привести вывод основных формул теории гравитационных волн. При этом мы, однако, будем пользоваться не методом Эйнштейна, а другим методом, в котором гравитационное поле характеризуется не коэффициентами $h_{\mu\nu}$, как в методе Эйнштейна, а компонентами четырехзначного тензора Римана-Христоффеля, что, очевидно, сразу же исключает „фиктивные" гравитационные волны. На возможность такого метода указал уже Эддингтон (в цитированной книге). Разумеется, предлагаемый метод, в котором переход от одних потенциалов $h_{\mu\nu}$ к другим трактуется как перемена Eichung, а не как изменение системы отсчета, вполне эквивалентен методу Эйнштейна, и различие между ними, в сущности, тривиально. Для наших целей, однако, новый метод представляет некоторые преимущества, так как теория гравитационных волн при этом приобретает свойства, весьма напоминающие обычную классическую электродинамику, и это позволит нам в дальнейшем ввести квантовые условия в тесной аналогии с квантовой электродинамикой.

* А. С. Эддингтон, Теория относительности. ОНТИ Л. — М. 1934, стр. 236 и дальше.

** Эти соображения Ландау были высказаны им при обсуждении космологической теории автора настоящей работы (см. M. Bronstein, Sow. Phys. 3, 73, 1933), где они изложены в „добавлении при корректуре" (см. также G. A. Gamow, Phys. ZS. 35, 533, 1934). Обозначения (5), принятые в этой работе (см. дальше), также предложил Л. Д. Ландау.

Выбор „потенциалов" $h_{\mu\nu}$, соответствующих заданному гравитационному полю, характеризуемому четырехзначковым тензором Риманна-Христоффеля, может трактоваться не как выбор системы отсчета, а как обыкновенная Eichungstransformation—вроде той, с которой приходится иметь дело в электродинамике. Различные системы отсчета, соответствующие различным $h_{\mu\nu}$ (при условии, конечно, что $|h_{\mu\nu}| \ll 1$), но одним и тем же компонентам $B_{\mu\nu\sigma\rho}$, будут рассматриваться поэтому как одна и та же система отсчета. Это приводит к существенному для нас расширению класса „квазиинвариантов" (т. е. инвариантов по отношению к преобразованиям, с которыми имеет дело теория гравитационных волн): в частности, мы будем считать „квазиинвариантами" и такие величины, которые не инварианты по отношению к Eichungstransformation и которые поэтому не являются, даже приближенно, инвариантами общей теории относительности (примером такого квазиинварианта является лагранжева функция, которая будет выведена в начале следующей главы).

Заметим, что в дальнейшем не делается никакого различия между ковариантными и контравариантными компонентами тензоров, или, точнее говоря, употребляются всюду только ковариантные компоненты. В соответствии с этим применяется следующее правило суммирования: если написан одночлен, содержащий два одинаковых греческих значка, то подразумевается, что нужно придать значку четыре значения 0, 1, 2, 3 и произвести суммирование, взяв первый член суммы со знаком, а три последние с обратными:

$$A(\mu, \mu) = A(0,0) - A(1,1) - A(2,2) - A(3,3).$$

По латинским же значкам суммирование производится в том случае, если оно обозначено явно; при этом, если не указано противное, подразумевается, что латинский значок принимает три значения: 1, 2, 3.

Пренебрегая квадратичными членами, можно написать следующие уравнения, связывающие „компоненты поля" $B_{\mu\nu\sigma\rho} = (\mu\rho\nu\sigma)$ с потенциалами $h_{\mu\nu}$:

$$(\mu\rho\nu\sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} + \frac{\partial^2 h_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x_\rho \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 h_{\rho\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\right). \tag{3}$$

Из этих формул непосредственно вытекают условия симметрии:

$$(\mu\rho\nu\sigma) = -(\rho\mu\nu\sigma) = -(\mu\rho\sigma\nu) = (\nu\sigma\mu\rho) \tag{4}$$

и уравнение:

$$(\mu\rho\nu\sigma) + (\mu\nu\sigma\rho) + (\mu\sigma\rho\nu) = 0, \tag{4'}$$

а также приближенная форма „равенства Бианки":

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(\mu\rho\nu\sigma) + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\mu\rho\lambda\nu) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mu\rho\sigma\lambda) = 0. \tag{4''}$$

Введем символ e_{ikl}, антисимметричный по отношению к любой паре значков при условии $e_{123}=1$. Мы можем ввести вместо $(\mu\rho\nu\sigma)$ три типа символов, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &(0\,i\,0\,k) = a_{ik}, \\ &(0\,ikl) = \sum_m b_{im} e_{mkl}, \qquad (\text{напр. } b_{i1} = (0\,i\,23)) \\ &(iklm) = \sum_{p,q} c_{pq} e_{pik} e_{qlm}. \qquad (\text{напр. } c_{12} = (2331)) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При решении этой задачи пользование потенциалами $h_{\mu\nu}$ (вместо Φ, B_{ik}) представляет большие преимущества, так как дает возможность связать функцию Лагранжа непосредственно с инвариантами, играющими важную роль в общей теории относительности.

Гамильтонова функция (48) может быть истолкована как плотность энергии гравитационного поля. Она может быть выражена через потенциалы $h_{\mu\nu}$ и их производные следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial t}\right)^2 + \sum_m \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x_m}\right)^2\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial t}\,\frac{\partial \sum_l h_{ll}}{\partial t} + \sum_m \frac{\partial h_{00}}{\partial x_m}\,\frac{\partial \sum_l h_{ll}}{\partial x_m}\right] - \\ & - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\partial \sum_l h_{ll}}{\partial t}\right)^2 + \sum_m \left(\frac{\partial \sum_l h_{ll}}{\partial x_m}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\sum_l \left[\left(\frac{\partial h_{0l}}{\partial t}\right)^2 + \sum_m \left(\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_m}\right)^2\right] + \\ & + \frac{1}{4}\sum_{l,n}\left[\left(\frac{\partial h_{ln}}{\partial t}\right)^2 + \sum_m \left(\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_m}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{l,m}\left[\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}\,\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_m} - \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_m}\,\frac{\partial h_{0m}}{\partial x_l}\right] - \\ & - \frac{1}{2}\sum_{l,m,n}\left[\frac{\partial h_{lm}}{\partial x_n}\,\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_m} - \frac{\partial h_{lm}}{\partial x_m}\,\frac{\partial h_{ln}}{\partial x_n}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Если ввести разложение Фурье

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\,[h_{\alpha\beta,\mathbf{k}}\,e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})} + h^{+}_{\alpha\beta,\mathbf{k}}\,e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}], \quad (51)$$

где $|\mathbf{k}| = \omega$, то интеграл $E = \int H d\tau$ (энергия гравитационных волн) окажется независящим от времени. Несложные выкладки, которые мы здесь опускаем, приводят к результату

$$\left.\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2}\int (h^{+}_{00,\mathbf{k}} + \sum_l h^{+}_{ll,\mathbf{k}})\,(h_{00,\mathbf{k}} + \sum_l h_{ll,\mathbf{k}})\,\omega^2 d\mathbf{k} + \\ & + \sum_{l \gtrless m}\int (h_{lm,\mathbf{k}} h^{+}_{lm,\mathbf{k}} - h^{+}_{ll,\mathbf{k}} h_{mm,\mathbf{k}})\,\omega^2 d\mathbf{k} - 2\sum_l \int h_{0l,\mathbf{k}} h^{+}_{0l,\mathbf{k}}\,\omega^2 d\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Добавочные соотношения (23) при этом получают вид

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\omega}{2}\left(h_{00,\mathbf{k}} + \sum_l h_{ll,\mathbf{k}}\right) - \sum_l \mathbf{k}_l h_{0l,\mathbf{k}} = 0, \\ & \omega h_{0l,\mathbf{k}} + \sum_m \mathbf{k}_m h_{ml,\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}_l}{2}\left(h_{00,\mathbf{k}} - \sum_m h_{mm,\mathbf{k}}\right) = 0 \quad (l = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

6. Перестановочные соотношения

Согласно Хайзенбергу и Паули* квантовые условия в случае непрерывной среды имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & [h_{\alpha\beta}(\mathbf{r}), h_{\alpha'\beta'}(\mathbf{r}')] = 0, \\ & [p_{\alpha\beta}(\mathbf{r}), p_{\alpha'\beta'}(\mathbf{r}')] = 0, \\ & [p_{\alpha\beta}(\mathbf{r}), h_{\alpha'\beta'}(\mathbf{r}')] = \frac{\hbar}{i}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\alpha \leqslant \beta,\ \alpha' \leqslant \beta'), \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

* W. Heisenberg und W. Pauli, ZS. f. Phys. **56**, 1, 1929.

где $h_{\alpha\beta}$ — „координаты“, $p_{\alpha\beta}$ — сопряженные с ними „импульсы“. Величины, входящие в скобки Пуассона, относятся к одному и тому же моменту времени, хотя могут относиться и к различным точкам пространства.

Квантовая теория гравитационного поля основана на 1) гамильтоновой функции (52), 2) квантовых условиях (54) и 3) на соотношениях (23), которые могут трактоваться как некоторое добавочное условие, налагаемое на возможные состояния гравитационного поля, совместимое, как мы увидим ниже, с квантовыми уравнениями движения.

Выкладки, которых мы здесь не будем воспроизводить, показывают, что перестановочные соотношения (54) равносильны соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&[h_{\alpha\beta,\mathbf{k}},\ h_{\alpha'\beta',\mathbf{k}'}] = 0, \quad [h^{+}_{\alpha\beta,\mathbf{k}},\ h^{+}_{\alpha'\beta',\mathbf{k}'}] = 0,\\
&[h^{+}_{00,\mathbf{k}},\ h_{00,\mathbf{k}'}] = [h^{+}_{00,\mathbf{k}},\ h_{ll,\mathbf{k}'}] = [h^{+}_{ll,\mathbf{k}},\ h_{ll,\mathbf{k}'}] = -\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\
&[h^{+}_{0l,\mathbf{k}},\ h_{0l,\mathbf{k}'}] = [h^{+}_{ll,\mathbf{k}},\ h_{0m,\mathbf{k}'}] = [h^{+}_{0l,\mathbf{k}},\ h_{mn,\mathbf{k}'}] = 0,\\
&[h^{+}_{00,\mathbf{k}},\ h_{lm,\mathbf{k}'}] = [h^{+}_{nn,\mathbf{k}},\ h_{lm,\mathbf{k}'}] = 0 \quad (l \neq m),\\
&[h^{+}_{ll,\mathbf{k}},\ h_{mm,\mathbf{k}'}] = \frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad (l \neq m),\\
&[h^{+}_{0l,\mathbf{k}},\ h_{0m,\mathbf{k}'}] = \frac{\hbar}{2\omega}\,\delta_{lm}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\
&[h^{+}_{lm,\mathbf{k}},\ h_{pq,\mathbf{k}'}] = -\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta_{lp}\delta_{mq}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad (l < m,\ p < q).
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

С помощью этих соотношений легко не только проверить соотношения (54), но и вывести всевозможные перестановочные соотношения между символами Христоффеля, компонентами поля и т. п. Заметим, что если мы имеем дело с величинами, которые являются линейными комбинациями различных производных от $h_{\alpha\beta}$ по x_ν, то скобка Пуассона

$$[M(\mathbf{r}),\ N(\mathbf{r}')],$$

где обе величины относятся к разным точкам пространства ($\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$), но к одному и тому же моменту времени может быть вычислена с помощью функции $f(\mathbf{k})$, определяемой из соотношения

$$[M_{\mathbf{k}},\ N^{+}_{\mathbf{k}'}] = f(\mathbf{k})\cdot\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Несложное вычисление показывает, что в этом случае можно писать

$$[M(\mathbf{r}), N(\mathbf{r}')] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int [f(\mathbf{k}) - f^{+}(-\mathbf{k})]\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{k}.$$

Так например, если положить

$$M = p_{00} + \frac{1}{4}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{00} + \sum_{l} h_{ll}\right) - \sum_{l}\frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}, \quad N = h_{00},$$

то

$$M_{\mathbf{k}} = -\frac{i\omega}{4}\left(h_{00,\mathbf{k}} + \sum_{l} h_{ll,\mathbf{k}}\right) - i\sum_{l}\mathbf{k}_l h_{0l,\mathbf{k}}, \quad N_{\mathbf{k}} = h_{00,\mathbf{k}},$$

и на основании (55) получается

$$[M_{\mathbf{k}},\ N^{+}_{\mathbf{k}'}] = \frac{\hbar}{2i}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}');$$

откуда

$$f(\mathbf{k})-f^{+}(-\mathbf{k})=\frac{\hbar}{i}$$

и, следовательно,

$$[p_{00}(\mathbf{r}),\ h_{00}(\mathbf{r}')]=\frac{\hbar}{i}\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d\mathbf{k}=\frac{\hbar}{i}\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

в согласии с (54). Таким же образом, если положить

$$M=[00,\ k]\quad N=[00,\ l],$$

то

$$M_{\mathbf{k}}=-i\omega h_{0k,\,\mathbf{k}}-\frac{1}{2}\,i\mathbf{k}_k h_{00,\,\mathbf{k}}.$$

Поэтому

$$[M_{\mathbf{k}},\ N_{\mathbf{k}'}^{+}]=-\frac{\hbar}{2\omega}\left(\delta_{kl}-\frac{1}{4}\,\mathbf{k}_k\mathbf{k}_l\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

откуда

$$f(\mathbf{k})-f^{+}(-\mathbf{k})=0,$$

и следовательно все три скобки Христоффеля коммутируют друг с другом. Мы не станем выводить всех перестановочных соотношений, которые могут быть получены из (55). Можно было бы думать, что здесь, как и в квантовой электродинамике, получается вполне последовательная квантово-механическая схема, содержащая величины, которые, правда, не всегда могут быть измеряемы с произвольно заданной точностью одновременно, но каждая из них может быть сколько угодно точно измерена в отдельности. Иными словами, можно было бы думать (следуя терминологии Ландау и Пайерльса),* что измерения этих величин являются „предсказуемыми" измерениями. Чтобы понять природу тех физических условий, которые могут сделать это утверждение недействительным, рассмотрим в качестве простейшего примера измерение величины [00, 1] т. е. одной из скобок Христоффеля. Эта величина может быть измерена посредством пробного тела, движущегося со скоростью, бесконечно малой по сравнению со скоростью света, так как уравнения движения такого тела могут быть написаны в виде: **

$$\frac{d^2x}{dt^2}=[00,1]=\frac{\partial h_{01}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial t}. \qquad (56)$$

---

* L. Landau und R. Peierls, ZS. f. Phys. 69, 56, 1931.

** В самом деле в уравнении геодезической линии

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\beta\ \gamma\\ \alpha\end{matrix}\right\}\frac{dx_\beta}{ds}\cdot\frac{dx_\gamma}{ds}=0$$

при весьма слабом гравитационном поле, что дает $\left\{\begin{matrix}\beta\ \gamma\\ 1\end{matrix}\right\}=-[\beta\gamma,1]$, положим $\alpha=1$. Мы находим

$$\frac{d^2x_1}{ds^2}=[\beta\gamma,\ 1]\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\gamma}{ds}.$$

При малых скоростях правая часть сводится к $[00,\ 1]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$.

При малых скоростях можно также писать $ds^2=dt^2(1+h_{00})$.

Поэтому $\frac{d^2x_1}{ds^2}=\frac{1}{\sqrt{1+h_{00}}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h_{00}}}\right)\frac{dx}{dt}$. Если скорость близка к нулю, то $\frac{d^2x_1}{ds^2}=\frac{1}{1+h_{00}}\frac{d^2x}{dt^2}$, откуда и следует формула (56).

Если нужно измерить среднее значение величины [00,1] в объеме V и за промежуток времени T, то измерение сведется к определению импульса пробного тела (точнее: компоненты p_x) в начале и в конце промежутка времени T, причем предполагается, что пробное тело имеет объем V. Измеряемая величина [00,1] есть по определению

$$[00,\ 1] = \frac{(p_x)_{t-T} - (p_x)_t}{\rho VT},$$

где ρ плотность (масса на единицу объема) пробного тела. Поэтому, если измерение импульса сопряжено с неопределенностью порядка Δp_x, то и измерение [00,1] сопряжено с неопределенностью

$$\Delta\,[00,\ 1] \sim \frac{\Delta p_x}{\rho VT}. \tag{57}$$

Если для измерения импульса необходим промежуток времени Δt (причем, само собою, должно быть $\Delta t \ll T$) и если обозначить через Δx связанную с измерением импульса неопределенность в координате, то неопределенность импульса Δp_x будет состоять из двух членов: из обычного члена $\frac{h}{\Delta x}$ и из члена, связанного с полем тяготения, создаваемым самим измерительным прибором вследствие отдачи при измерении импульса. В самом деле, из уравнения (24) видно, что

$$\Box\, h_{01} = 16\pi G T_{01} = \varkappa' \rho v_x,$$

откуда видно, что неопределенность величины h_{01}, создаваемая неопределенностью отдачи со скоростью порядка $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ имеет порядок величины

$$\varkappa' \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} (\Delta t)^2$$

($\varkappa'$ = постоянной тяготения, помноженной на 16π). Из формулы (56) вытекает, что соответствующая неопределенность величины [00, 1] имеет порядок величины $\varkappa' \rho \Delta x$.

Соответствующий неопределенный импульс, сообщенный измерительному прибору его собственным гравитационным полем, имеет порядок величины $\varkappa' \rho \Delta x \cdot \rho V \cdot \Delta t$. Поэтому полное выражение для Δp_x будет

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} + \varkappa \rho^2 V \Delta x\, \Delta t. \tag{58}$$

Можно было бы думать, что обычные соотношения неопределенности теряют силу в гравитационном поле, однако—по аналогии с известными рассуждениями Бора и Розенфельда* в квантовой электродинамике—можно показать, что второй член в формуле (58) может быть сделан сколь угодно малым по сравнению с первым. Тем не менее из формулы (57) видно, что это не есть наиболее ловкий способ производить мысленный эксперимент, так как для наиболее точного измерения [00,1] необходимо сделать Δp_x минимальным, а это, как видно из (58) достигается, когда оба члена имеют одинаковый порядок величины, т. е. когда

$$\Delta x \sim \left(\frac{h}{\varkappa \rho^2 V \Delta t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

* N. Bohr and L. Rosenfeld, Dansk. Vidensk Selskab. Math.—Fys. Meddel. 12, 8, 1933.

Наименьшее значение Δp_x равно

$$(\Delta p_x)_{\min} \sim (h\varkappa\rho^2 V\Delta t)^{\frac{1}{2}}$$

и это дает для измеряемой величины неопределенность

$$(\Delta [00,\ 1])_{\min} \sim \frac{1}{T}\left(\frac{h\varkappa\Delta t}{V}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Два обстоятельства приводят к тому, что продолжительность измерения импульса (Δt) не может быть сделана сколь угодно малой. Во-первых, принцип относительности требует, чтобы Δx был меньше, чем Δt (скорость отдачи, вызванной измерением импульса, не может превосходить фундаментальную скорость, т. е. единицу). Поэтому

$$\left(\frac{h}{\varkappa\rho^2 V\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \Delta t, \tag{60}$$

т. е.

$$\Delta t \gtrsim \left(\frac{h}{\varkappa\rho^2 V}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Во-вторых, из самого определения измерения поля следует, что Δx должен быть гораздо меньше линейных размеров пробного тела, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{h}{\varkappa\rho^2 V\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} &\ll V^{\frac{1}{3}}, \\ \Delta t &\gg \frac{h}{\varkappa\rho^2 V^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}\right\} \tag{60'}$$

Таким образом, для Δt получаются д в е нижних границы (60) и (60′), причем отношение первой из них ко второй равно

$$\left(\frac{\varkappa\rho^2 V^2}{h}\right)^{\frac{2}{3}},$$

т. е. оно зависит от массы пробного тела, будет совершенно ничтожной величиной в случае электрона и, становясь величиной порядка 1 в случае пылинки, весящей сотую долю миллиграмма. Для неопределенности измеряемой величины [00,1] мы получаем нижнюю границу в том и другом случае различную, а именно

$$(\Delta [00,\ 1])_{\min} \gtrsim \frac{h^{\frac{2}{3}}\varkappa^{\frac{1}{3}}}{T\rho^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}}}. \tag{61}$$

и

$$(\Delta [00,\ 1])_{\min} \gtrsim \frac{h}{T\rho V^{\frac{4}{3}}}. \tag{61'}$$

Отсюда следует, что для возможно более точного определения среднего значения измеряемой скобки Х р и с т о ф ф е л я в данном объеме пространства —

времени выгодно применять в качестве измерительных приборов пробные тела возможно большой массы. Поэтому из двух границ (60) и (60′) единственно существенной становится первая, которая в этом случае оказывается большей, чем вторая. Для минимальной ошибки при измерении величины $[00,1]$ получается, следовательно, граница (61).

До сих пор все рассуждения были в большей степени параллельны соответствующим рассуждениям в квантовой электродинамике;* но на этом месте приходится принять во внимание обстоятельство, из которого обнаруживается принципиальное различие между квантовой электродинамикой и квантовой теорией гравитационного поля. Различие это заключается в том, что в формальной квантовой электродинамике, не учитывающей структуры элементарного заряда, нет никаких принципиальных причин, ограничивающих увеличение плоскости ρ. При достаточно большой плотности заряда пробного тела точность измерения компонент электрического поля может быть сделана какой угодно. В природе, вероятно, существуют принципиальные ограничения плотности электрического заряда (не больше одного элементарного заряда на объем с линейными размерами порядка классического электронного радиуса); однако, эти ограничения не учитываются формальной квантовой электродинамикой, вследствие чего она может без противоречий рассматривать измерения электромагнитных величин, как „предсказуемые". Не то — в квантовой теории гравитационного поля: она должна считаться с ограничением, вытекающим из того, что гравитационный радиус пробного тела ($\varkappa\rho V$) не может превосходить его действительных линейных размеров:

$$\varkappa\rho V \lesssim V^{\frac{1}{3}},$$

откуда

$$\frac{h^{\frac{2}{3}}\varkappa^{\frac{1}{3}}}{T\rho^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}}} \gtrsim \frac{h^{\frac{2}{3}}\varkappa^{\frac{2}{3}}}{TV^{\frac{4}{9}}}.$$

Итак, величина, стоящая в правой части этого неравенства, представляет абсолютный минимум неопределенности при измерении компонент напряжения силы тяжести, который невозможно перейти введением целесообразно выбранного измерительного прибора. Этот абсолютный предел вычислен очень грубо, потому что при достаточно большой массе измерительного прибора начнут, вероятно, играть роль отступления от принципа суперпозиции (мы здесь всюду рассматриваем случай гравитационных волн, т. е. приближенно считаем уравнения закона тяготения линейными; это приближение как раз перестает быть удовлетворительным вблизи поверхности тяжелого тела, гравитационный радиус которого приближается к его действительным размерам). Тем не менее, можно думать, что аналогичный результат сохранится и в более точной теории, так как он нисколько сам по себе не вытекает из принципа суперпозиции, а соответствует лишь тому факту, что в общей теории относительности не может существовать тел сколь угодно большой массы при заданном объеме. В электродинамике нет никакой аналогии этому факту (и именно вследствие того, что в ней имеет место принцип суперпозиции); вот почему квантовая электродинамика возможна без внутренних противоречий. В теории же гравитационных волн это внутреннее противоречие никак не может быть обойдено; мы можем считать измерения величин гравитационного поля „пред-

* См. М. Бронштейн. ДАН СССР, № 7, 1934

сказуемым“ лишь в том случае, если ограничимся рассмотрением достаточно больших объемов и промежутков времени. Устранение связанных с этим логических противоречий требует радикальной перестройки теории и, в частности, отказа от римановой геометрии, оперирующей, как мы здесь видим, принципиально наблюдаемыми величинами — а может быть и отказа от обычных представлений о пространстве и времени и замены их какими-то гораздо более глубокими и лишенными наглядности понятиями. Wer's nicht glaubt, bezahlt einen Thaler.

7. Нахождение собственных значений энергии

Ограничиваясь тем случаем, когда имеет место принцип суперпозиции, и соображения, изложенные в конце предыдущего параграфа, не играют роли, мы можем выводить следствия из перестановочных соотношений (54), или, что то же, (55). Начнем с нахождения собственных значений оператора энергии поля (52).

Для нахождения собственных значений оператора (52) удобно ввести следующие новые динамические переменные:

$$\left.\begin{aligned} &Q_{00,\mathbf{k}}=\frac{1}{2}\Big(h_{00,\mathbf{k}}+\sum_l h_{ll,\mathbf{k}}\Big);\quad Q_{nn,\mathbf{k}}=\frac{1}{2}\Big(\sum_l h_{ll,\mathbf{k}}-h_{nn,\mathbf{k}}\Big);\\ &Q_{lm,\mathbf{k}}=h_{lm,\mathbf{k}}\quad(l\neq m);\quad Q_{0l,\mathbf{k}}=h_{0l,\mathbf{k}};\\ &P_{00,\mathbf{k}}=\frac{1}{2}\Big(h^{+}_{00,\mathbf{k}}+\sum_l h^{+}_{ll,\mathbf{k}}\Big);\quad P_{nn,\mathbf{k}}=h^{+}_{nn,\mathbf{k}};\\ &P_{lm,\mathbf{k}}=h^{+}_{lm,\mathbf{k}}\quad(l\neq m);\quad P_{0l,\mathbf{k}}=h^{+}_{0l,\mathbf{k}}.\end{aligned}\right\}\tag{62}$$

Перестановочные соотношения (55) приводят к следующему результату: все $Q_{\mathbf{k}}$ коммутируют со всеми $Q_{\mathbf{k}'}$, все $P_{\mathbf{k}}$ со всеми $P_{\mathbf{k}'}$, всякий $P_{\mathbf{k}}$ коммутирует со всеми $Q_{\mathbf{k}'}$, кроме того, который имеет с ним одинаковые значки и, наконец,

$$\left.\begin{aligned} &[P_{00,\mathbf{k}},\ Q_{00,\mathbf{k}'}]=[P_{lm,\mathbf{k}},\ Q_{lm,\mathbf{k}'}]=-\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\quad(l\neq m)\\ &[P_{nn,\mathbf{k}},\ Q_{nn,\mathbf{k}'}]=[P_{0l,\mathbf{k}},\ Q_{0l,\mathbf{k}'}]=\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned}\right\}\tag{63}$$

В переменных (62) полная энергия гравитационного поля оказывается суммой десяти коммутирующих друг с другом членов:

$$\left.\begin{aligned} E=2\int\omega^2 d\mathbf{k}\,\Big\{&P_{00,\mathbf{k}}Q_{00,\mathbf{k}}+\sum_{l<m}Q_{lm,\mathbf{k}}P_{lm,\mathbf{k}}-\\ &-\sum_n P_{nn,\mathbf{k}}Q_{nn,\mathbf{k}}-\sum_l Q_{0l,\mathbf{k}}P_{0l,\mathbf{k}}\Big\}.\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

Пользуясь шаблонными приемами, легко показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\text{собственные значения } 2\int\omega^2 d\mathbf{k}P_{00,\mathbf{k}}Q_{00,\mathbf{k}} &&\text{суть }\sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega n_{00},\\ &\text{собственные значения } 2\int\omega^2 d\mathbf{k}Q_{lm,\mathbf{k}}P_{lm,\mathbf{k}}\ (l\neq m) &&\text{суть }\sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega(n_{lm}+1),\\ &\text{собственные значения } 2\int\omega^2 d\mathbf{k}Q_{0l,\mathbf{k}}P_{0l,\mathbf{k}} &&\text{суть }-\sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega n_{0l},\end{aligned}\right\}\tag{65}$$

где квантовые числа n принимают значения 0, 1, 2, 3 . . . . .

Подставляя это в (97) и пользуясь (96), мы получаем (вычеркивая бесконечные члены, соответствующие гравитационному действию частицы на самое себя) приближенную формулу

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2 \sim \frac{m_1 m_2}{4(2\pi)^3\hbar}\,\frac{\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0)\,\delta_{J J_0}\, e^{-\frac{i}{\hbar}W_0 t}}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2},$$

которая отличается знаком правой части от аналогичной формулы (42) работы Фока — Подольского. Соответственно этому, переходя к координатному пространству, мы получаем энергию взаимодействия в виде

$$-\frac{m_1 m_2}{16\pi\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

т. е. получаем закон притяжения Ньютона с гравитационной постоянной $g = \frac{1}{16\pi}$ (откуда $\varkappa = 8\pi g = \frac{1}{2}$), что соответствует выбранной нами системе единиц.

Тот факт, что в теории тяготения, в отличие от электродинамики, мы имеем притяжение между частицами, а не отталкивание, объясняется тем, что потенциал h_{00} удовлетворяет перестановочному соотношению, в котором знак другой, нежели в аналогичном перестановочном соотношении для скалярного электромагнитного потенциала.

Таким образом, закон тяготения Ньютона можно до известной степени считать следствием из теории гравитационных квантов.

Ленинград

Поступило в Редакцию
14 декабря 1935 г.

QUANTIZATION OF GRAVITATIONAL WAVES

By *M. Bronstein*

A consequent quantum theory of weak gravitational field is constructed. The gravitational field in empty space is treated as a quantum-mechanical system, and relativistic-invariant commutation rules are introduced. The gravitational interaction of material bodies is established through the intermediate agency of gravitational quanta. Two physical applications are considered: 1) the loss of energy of material systems by means of the radiation of gravitational waves, and 2) the derivation of Newton's Law of Gravitation.

Leningrad