ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

COMPTES RENDUS
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

НОВАЯ СЕРИЯ — NOUVELLE SÉRIE

1934

ЯНВАРЬ — МАРТ JANVIER — MARS

ТОМ I — VOLUME I

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD

ФИЗИКА

М. П. БРОНШТЕЙН

К ВОПРОСУ О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 22 I 1934*)

В недавно вышедшей работе Бор и Розенфельд (1) показали, что неопределенность в значении электрического поля, обусловленная излучением заряженного пробного тела, которое является измерительным прибором, всегда может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с неопределенностью, обусловленной соотношением $\Delta p \Delta q \gtrsim h$. Однако, для того, чтобы измерить поле с максимальной точностью, не следует производить мысленный эксперимент так, чтобы реакция излучения на пробное тело была по возможности мала. Если нужно измерить среднее значение компоненты $\mathfrak{E}_x$ в объеме V и за промежуток времени T с помощью пробного тела объема V с равномерной плотностью заряда ρ, то мы имеем по определению

$$\rho \mathfrak{E}_x VT = (p_x)_{t+T} - (p_x)_t;$$

откуда

$$\Delta \mathfrak{E}_x \sim \frac{\Delta p_x}{\rho VT}.$$

Если время, необходимое для измерения импульса, равно Δt ($\ll T$ и если обозначить через Δx связанную с измерением импульса неопределенность в координате, то неопределенность в импульсе, связанная с реакцией излучения, равна по Бору и Розенфельду $\rho^2 V \Delta x\, \Delta t$ (так как электрическое поле, созданное измерением импульса в пространстве, занятом пробным телом, равно по порядку величины $\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t$, а сообщенный этим полем пробному телу импульс равен произведению поля на $\rho V \Delta t$).

Поэтому,

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} + \frac{e^2}{V} \Delta + \Delta x,$$

где e заряд пробного тела (не смешивать с зарядом электрона e). Бор и Розенфельд показывают, что второй член может быть сделан сколь угодно малым по сравнению с первым. Но это не есть наиболее ловкий способ произвести мысленный эксперимент. Минимум Δp_x получается в том случае, когда оба члена имеют одинаковый порядок величины, т. е.

$$\Delta x \sim \sqrt{\frac{hV}{e^2 \Delta t}}$$

Наименьшее значение Δp_x равно

$$(\Delta p_x)_{\min} \sim e \sqrt{\frac{h \Delta t}{V}}$$

это дает для поля

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \sim \frac{1}{T} \sqrt{\frac{h \Delta t}{V}},$$

что при достаточно малых Δt может быть сделано сколь угодно малым. Две причины мешают, однако, неограниченно уменьшать продолжительность измерения импульса. Во-первых, из принципа относительности следует, что Δx должно быть меньше, чем $c\Delta t$ (скорость отдачи, вызванной измерением импульса, не может превосходить c). Поэтому,

$$\sqrt{\frac{hV}{e^2\Delta t}} \lesssim c\Delta t \text{ или } c\Delta t \gtrsim \left(\frac{hc}{e^2}\right)^{1/3} V^{1/3}.$$

Во-вторых, из самого отделения измерения поля следует, что Δx должно быть гораздо меньше линейных размеров пробного тела, т. е.

$$\sqrt{\frac{hV}{e^2\Delta t}} \ll V^{1/3} \text{ или } c\Delta t \gg \frac{hc}{e^2} V^{1/3}.$$

Для минимального значения $\Delta\mathfrak{E}_x$ отсюда получаются два неравенства:

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gtrsim \frac{\sqrt{\frac{h}{c}}}{TV^{1/3}} \left(\frac{hc}{e^2}\right)^{1/6}$$

и

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gg \frac{\sqrt{\frac{h}{c}}}{TV^{1/3}} \left(\frac{hc}{e^2}\right)^{1/2}$$

или, что тоже самое,

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gtrsim \frac{h^{2/3}}{c^{1/3}\, TV^{2/3} \rho^{1/3}}$$

и

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gg \frac{h}{TV^{4/3}\rho}.$$

Первая граница больше или меньше второй в зависимости от того больше ли e^2 чем hc или меньше. Если, например, измерительным прибором служит электрон, то существенна только вторая граница [это приводит к минимальному значению $\Delta\mathfrak{E}_r$, совпадающему по форме с тем, которое было найдено Фоком и Иорданом (2)]. Но так как для возможно более точного измерения поля в заданном элементе пространства времени выгодно употреблять по возможности большие заряды, то существенной оказывается первая граница, а не вторая. Принципиальная невозможность измерить с произвольной точностью поле в будущей релятивистской теории квант будет связана с принципиальным атомизмом материи, т. е. с принципиальной невозможностью беспредельно увеличивать ρ.

Что касается измерения магнитной компоненты $\mathfrak{H}_x$, то мы для этой цели применяем заряженное пробное тело, движущееся в направлении от y-ов со скоростью βc. В системе отчета, связанной с пробным телом, оно измеряет z-овую компоненту электрического поля, которая равна $-\frac{\beta\mathfrak{H}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Поэтому, мы получаем $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{\Delta p_z}{eT'}$, где T' промежуток времени между обоими измерениями импульса, измеренный по часам, связанным с пробным телом. Так как на основании принципа относительности $T' = T\sqrt{1-\beta^2}$, то

$$\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{c\Delta p_z}{eTv_y}.$$

Величина $\Delta y = v_y T$, т. е. смещение пробного тела в направлении y-ов за время измерения поля, должна быть очень мала по сравнению с $V^{1/3}$. А так как Δp_z по порядку величины должно быть $\gtrsim \frac{\hbar}{\Delta z}$, то, следовательно,

$$\Delta\mathfrak{H}_x \gtrsim \frac{\hbar c}{e\Delta y\ \Delta z}.$$

(Эта формула представляет известную параллель выше приведенной формуле для $\Delta\mathfrak{E}_x$, которая может быть написана в виде $\Delta\mathfrak{H}_x \gtrsim \frac{\hbar c}{e\Delta x \cdot cT}$, где cT есть, так сказать, смещение измерительного прибора в течение измерения поля в направлении оси ct.) Нижняя граница для $\Delta\mathfrak{H}_x$ связана с двумя обстоятельствами: во-первых, с условиями $\Delta z \leq c\Delta t$ и $\Delta y \lesssim cT$, и во-вторых, с условиями Δy, $\Delta z \ll V^{1/3}$. Так как Δz по порядку величины должно равняться $\sqrt{\frac{hV}{e^2\,\Delta t}}$ и так как при условии $cT \ll V^{1/3}$ (это условие делается также в работе Бора и Розенфельда) неравенство $\Delta y \lesssim cT$ делает излишним неравенство $\Delta y \ll V^{1/3}$, то для минимального значения $\Delta\mathfrak{H}_x$ получается такая же величина, как и для минимума $\Delta\mathfrak{E}_x$ (т. е. $\frac{h^{2/3}}{c^{1/3}\ TV^{2/3}\ \rho^{1/3}}$ при условиях, наиболее благоприятствующих измерению магнитного поля, а именно когда ρ по возможности велико и когда скорость пробного тела сравнима со скоростью света).

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
17 I 1934.

PHYSIK

ZUR RELATIVISTISCHEN ERWEITERUNG DES UNBESTIMMTHEITSPRINZIPES

Von M. BRONSTEIN

(*Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 22. I. 1934*)

In ihrer unlängst erschienenen Arbeit (1) finden Bohr und Rosenfeld, dass bei Messung des elektrischen Feldes die Ungenauigkeit, welche durch die Ausstrahlung des als Messinstrument benutzten geladenen Probekörpers bedingt ist, stets im Vergleich zu der durch das Verhältnis $\Delta p\ \Delta q \gtrsim h$ bedingten Ungenauigkeit sehr klein gemacht werden kann. Für eine möglichst genaue Bestimmung des Feldes ist es aber keineswegs geboten den Gedankenversuch so auszuführen, dass die Reaktion des Strahlung auf den Probekörper beliebig klein wäre. Wenn wir den Mittelwert der elektrischen Feldkomponente $\mathfrak{E}_x$ im Raumgebiet V und in der Zeitspanne T messen wollen mit Hilfe eines mit der gleichmässigen Dichte ρ geladenen Probekörpers vom Volumen V, so haben wir definitionsweise

$$\rho\mathfrak{E}_x\ VT = (p_x)_{t+T} - (p_x)_t$$

woraus

$$\Delta\mathfrak{E}_x \sim \frac{\Delta p_x}{\rho VT}$$

folgt. Wenn die für die Impulsmessung erforderliche Zeit Δt ($\ll T$) ist und die mit der Impulsmessung verbundene Ungenauigkeit der Koordinate mit Δx bezeichnet wird, dann beträgt nach Bohr und Rosenfeld die mit der Reaktion der Strahlung verbundene Ungenauigkeit im Impuls $\rho^2 V\Delta x\Delta t$ (denn nach den Maxwell'schen Gleichungen ist das durch die Messung des Impulses im von Probekörper erfüllten Raum erzeugte Feld $\sim p\,\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\Delta t$ und der von diesem Feld dem Probekörper abgegebene Impuls ist gleich dem Feld mal $\rho V\Delta t$). Demnach erhalten wir:

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} + \frac{e^2}{V}\,\Delta t\Delta x,$$

wo e die gesamte Ladung des Probekörpers ist (nicht mit der Elektronenladung e zu verwechseln!). Das zweite Glied, wie Bohr und Rosenfeld zeigen, kann im Vergleich zum ersten beliebig klein gemacht werden. Für die Ausführung des Gedankenexperimentes ist dieses Verfahren aber zu schwerfällig. Der Mindeswert von Δp_x ergibt sich dagegen wenn die beiden Glieder von derselben Grössenordnung sind, d. h. wenn

$$\Delta x \sim \sqrt{\frac{hV}{e^2\,\Delta t}}.$$

Dieser Minimalwert von Δp_x beträgt

$$(\Delta p_x)_{\min} \sim e\sqrt{\frac{h\Delta t}{V}},$$

und das ergibt für die minimale Ungenauigkeit des Feldes

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \sim \frac{1}{T}\sqrt{\frac{h\Delta t}{V}},$$

welcher Ausdruck für genügend kleine Δt beliebig klein gemacht werden kann. Zwei Umstände verhindern es aber, die für die Impulsmessung verwendete Zeit Δt beliebig klein zu machen. Es folgt erstens aus der Relativitätstheorie dass Δx kleiner als $c\Delta t$ sein muss, d. h. während des durch die Impulsmessung verursachten Rückstosses kann die von Probekörper gewonnene Geschwindigkeit nur kleiner als c sein. Das heisst, dass

$$\sqrt{\frac{hV}{e^2\,\Delta t}} \lesssim c\Delta t \quad \text{oder} \quad c\Delta t \gtrsim \left(\frac{hc}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}}.$$

Zweitens muss auch im Sinne der Definition der Feldmessung Δx viel kleiner als die linearen Abmessungen des Probekörpers sein, d. h.

$$\sqrt{\frac{hV}{e^2\,\Delta t}} \ll V^{\frac{1}{3}} \quad \text{oder} \quad c\Delta t \gg \frac{hc}{e^2}\,V^{\frac{1}{3}}.$$

Für Minimalwert von $\Delta\mathfrak{E}_x$ ergeben sich daraus zwei Ungleichungen:

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \sim \frac{\sqrt{\frac{h}{c}}}{TV^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{h}{e^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{h^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}\,TV^{\frac{2}{3}}\,\rho^{\frac{1}{3}}},$$

und

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \gg \frac{\sqrt{\frac{h}{c}}}{TV^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{hc}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{TV^{\frac{4}{3}}}.$$

Die erste Grenze ist grösser bzw. kleiner als die zweite je nach dem, ob e^2 grösser oder kleiner als hc ist. Wenn z. B. das Elektron als Messinstrument verwendet ist, dann ist die zweite Grenze allein bestimmend [das führt zu einem Minimalwert von $\Delta\mathfrak{E}_x$ welcher der Form nach mit dem von Fock und Jordan erörterten (2) übereinstimmt]. Da es für die möglichst genaue Feldmessung in dem gegebenen kleinen Raumzeitgebiet vorteilhaft ist, möglichst grosse Ladungen zu benutzen, wird die erste Grenze, und nicht die zweite, bestimmend. Die prinzipielle Unmöglichkeit, das Feld in der zukünftigen relativistischen Quantentheorie mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen, wird mit dem prinzipiellen Atomismus der Materie verbunden sein, d. h. mit der prinzipiellen Unmöglichkeit ρ beliebig hoch zu steigern.

Was die Messung der magnetischen Feldkomponente $\mathfrak{H}_x$ betrifft, so benutzen wir dazu einen in der y-Richtung mit der Geschwindigkeit βc bewegten geladenen Probekörper. In dem mit diesem Probekörper verbundenen Bezugssystem misst er die elektrische z-Komponente $-\frac{\beta\mathfrak{H}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$, und wir erhalten $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{\Delta p_z}{eT'}$, wo T' die an einer mit dem Probekörper fest verbundenen Uhr gemessene Zeitspanne zwischen zwei Impulsmessungen ist. Da bekanntlich $T'-T\sqrt{1-\beta^2}$, so erhalten wir:

$$\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{c\Delta p_z}{eTv_y}.$$

Die Grösse $\Delta y = v_y T$, d. h. die Verschiebung in der y-Richtung während der Feldmessung muss sehr klein gegenüber sein. Da Δp_z der Grössenordnung nach nicht kleiner als $\frac{h}{\Delta z}$ sein darf, erhalten wir die Beziehung:

$$\Delta\mathfrak{H}_x \gtrsim \frac{hc}{e\Delta y\,\Delta z}$$

(Dieses bildet ein relativistisches Seitenstück zur vorher erhaltenen Beziehung für das elektrische Feld, die auch in der Form $\Delta\mathfrak{E}_x \gtrsim \frac{hc}{e\Delta x cT}$ geschrieben werden kann, wo cT, sozusagen, eine Verschiebung des Messinstruments in der Richtung der ct-Achse während der Feldmessung ist). Auch hier ist die untere Grenze für $\Delta\mathfrak{H}_x$ mit zwei Umständen verknüpft: erstens mit den Bedingungen $\Delta z \gtrsim c\Delta t$ und $\Delta y \lesssim cT$ und zweitens mit den Bedingungen Δy, $\Delta z \leqslant V^{\frac{1}{3}}$. Da Δz hier der Grössenordnung nach $\sim\sqrt{\frac{hV}{e^2\Delta t}}$ sein muss und da bei der (auch von Bohr und Rosenfeld angenommen) Bedingung $cT \leqslant V^{\frac{1}{3}}$ Ungleichung $\Delta y \lesssim cT$ die andere Ungleichung $\Delta y \leqslant V^{\frac{1}{3}}$ überflüssig macht, erhalten wir für den Minimalwert von $\Delta\mathfrak{H}_x$ denselben Ausdruck wie für $\Delta\mathfrak{E}_x$ $\left(\text{d. i. } \frac{h^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}\,TV^{\frac{2}{3}}\,\rho^{\frac{1}{3}}}\right.$ in dem für die Messung des magnetischen Feldes günstigsten Falle eines grösstmöglichen ρ und bei grösstmöglicher Geschwindigkeit des Probekörpers).

Physikalisch-Mathematisches
Institut der Akademie der Wissenschaften.
Leningrad.

Eingegangen
d. 17. I. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1 N. Bohr und L. Rosenfeld. Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math-fys Meddel., XII, 8, 1933. 2 V. Fock und P. Jordan. Z. f. Phys., **66**, 206, 1930.