Capítulo 4

Juegos de Negociación[1]

I. Introducción

Los juegos de negociación se refieren a situaciones en las que dos o más partes deben alcanzar un acuerdo acerca de cómo repartirse un determinado objeto o cantidad monetaria. En estos juegos, cada jugador prefiere alcanzar un acuerdo que no hacerlo; pero a su vez, prefiere el acuerdo más favorable desde su punto de vista. Ejemplos de tales situaciones son la negociación entre un sindicato y los empresarios de una compañía acerca del incremento salarial; la disputa entre dos comunidades sobre la repartición de un territorio común; las condiciones bajo las cuales dos países pueden iniciar un programa de desarme nuclear; etc. El análisis de este tipo de problemas busca, en primera instancia, una solución en la cual se especifique la fracción del objeto de la negociación que le corresponde a cada una de las partes.

Antes de la llegada de la teoría de juegos de von Neumann y Morgenstern [1944], lo que la teoría económica decía acerca de situaciones de negociación se restringía a dos postulados de racionalidad:

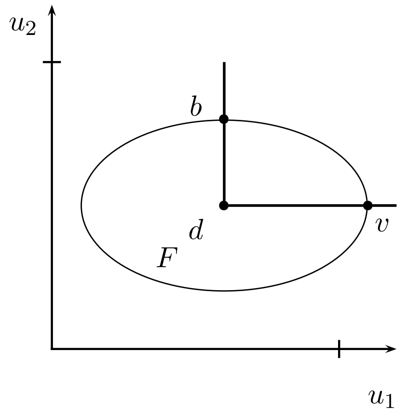
1. Racionalidad individual: nadie negociará por menos de cierto pago mínimo (llamado "punto de desacuerdo").

2. Racionalidad conjunta: nadie llegará a un acuerdo si existe un pago conjunto posible mejor que el que se está proponiendo.

En la figura 1, el conjunto de posibles pagos es F y el punto $d \in F$ es el pago mínimo conjunto. El área $\underline{bvd}$ está conformada por todos los pagos que satisfacen la condición de racionalidad individual, y la línea de frontera $\underline{bv}$ del conjunto F es el conjunto de todos los pagos que satisfacen la condición de racionalidad conjunta (frontera de Pareto). Edgeworth [1881] llamó a todos los puntos de la frontera $\underline{bv}$ *arreglos finales*; Pigou [1905] los llamó el *rango de acuerdos practicables*. Sin embargo, el que los acuerdos posibles estén en la frontera de Pareto $\underline{bv}$ del conjunto F no nos dice nada sobre *dónde* realmente podrían negociar, ni cómo las fuerzas de la negociación podrían llevar a los agentes a alguno de estos acuerdos. Fue quizás Zeuthen

[1] Julián Arévalo y Sergio Monsalve.

Figura 1: Problema de Negociación



[1930] quien primero creyó en la necesidad de una teoría fuerte de negociación que permitiera predecir un solo acuerdo (o unos pocos acuerdos) bien definidos. Zeuthen propuso que, para este objetivo, la teoría tendría que estar basada en las *actitudes hacia el riesgo* por parte de los agentes. Más específicamente, el nivel en el que cada agente está dispuesto a someterse a una disputa en lugar de aceptar términos desfavorables, debería tener un papel explícito en el modelo.

Infortunadamente, esta visión pionera de Zeuthen fue obscurecida por la aparición en 1944 del gigante *Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann y Morgenstern, en donde, sin embargo, los juegos de negociación de dos personas no van más allá de la teoría de negociación de Edgeworth y Pigou. Aún así, el aporte de von Neumann y Morgenstern fue indirectamente importante para la teoría de la negociación en el sentido de que desarrollaron herramientas útiles a ésta, como los conceptos de estrategia, función de pago, juego en forma extensiva y en forma estratégica, y función característica. En particular, el concepto de función de pago de von Neumann y Morgenstern era una formulación rigurosa que permitía el estudio formal del concepto de riesgo.

Fue Nash [1950a] quien definió primero un problema básico formal de negociación y planteó un primer conjunto de "propiedades deseables" (axiomas) que debería satisfacer la solución, que en adelante se llamaría *solución Nash de negociación*. A partir de allí, se entiende un problema de negociación como una situación en la que dos o más agentes deben cooperar de alguna forma para obtener (repartir) ciertos beneficios, los cuales no podrían alcanzarse de forma individual. El planteamiento del problema por parte de Nash y la solución ofrecida (que veremos más adelante) han generado un amplio campo de investigación en la interpretación y validez de los axiomas, y en la formulación de otras soluciones satisfaciendo propiedades diferentes. Los años siguientes a la aparición del trabajo de Nash en juegos de negociación estarían encaminados más hacia el desarrollo de la teoría de juegos coalicionales. Es así como aparecen los conceptos de valor (Shapley [1953]), núcleo (Luce y Raiffa

[1957], Gillies [1959]), kernel (Davis y Maschler [1965]), nucleolo (Schmeidler [1969]) y conjunto de negociación (Davis [1967]), que mencionamos en el capítulo anterior.

Años más tarde, Kalai y Smorodinski [1975] regresan al problema de negociación, y cuestionan la solución ofrecida por Nash, recurriendo, en particular, a la crítica recibida por el axioma de independencia de alternativas irrelevantes (uno de los incluidos en la solución de Nash), así como por los resultados contrarios mostrados por la evidencia experimental frente a la misma (ver Roth [1995a,b]). De esta forma, ofrecen una única solución en la que se reemplaza el axioma mencionado de la solución de Nash, por uno que cobije mejorías en la asignación de utilidad recibida por un agente cuando sus posibilidades de negociación se expanden.

Posteriormente, el mismo Kalai [1977] argumentaba que en un proceso de negociación los individuos realizan persistentes comparaciones interpersonales de utilidad, razón por la cual las soluciones propuestas deberían satisfacer este hecho. Así, propone una solución en la que las ganancias de la negociación deberían repartirse de forma igualitaria, independientemente del poder de negociación de los agentes, de su actitud frente al riesgo, o de cualquier otro aspecto que pudiera afectar los resultados en la solución de Nash. Argumentaba que esta posición se diferenciaba de la de Harsanyi [1977], en el sentido de que este último abogaba por la maximización de la suma de las utilidades de los individuos, y destacaba la relación entre esta solución y la propuesta de Rawls [1971] según la cual en cada estado se debe buscar la asignación que maximice el bienestar del individuo peor ubicado en la sociedad. Para la construcción de esta "solución igualitaria" de Kalai, es necesaria la condición de *invarianza ante descomposiciones del proceso de negociación en etapas*; es decir, el resultado de la negociación debería ser el mismo, independientemente de que se negocie de una sola vez el objeto total, o de si después de que este haya sido dividido se realiza la negociación por etapas y cada parte del objeto se negocia en una etapa diferente del proceso, en donde cada acuerdo alcanzado representa el *statu quo* de la siguiente etapa.

Otra vertiente del problema de negociación, iniciada con los trabajos de Ståhl [1972] y seguidos por Rubinstein [1982], se fundamenta en un escenario no-cooperativo donde los agentes vinculados a la negociación realizan ofertas y contraofertas hasta llegar a algún acuerdo (equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (Selten [1975]), en condiciones donde el tiempo que transcurre en la negociación y la paciencia de los jugadores juegan un papel importante. Este acuerdo resulta estar, bajo condiciones apropiadas, muy cerca de la solución Nash de negociación.

A partir de entonces, algunos autores han desarrollado modelos encaminados a justificar las soluciones cooperativas de negociación a través de equilibrios de juegos no-cooperativos; esto es lo que se conoce como *el programa Nash* (Binmore y Dasgupta [1987]). Hart y Mas-Colell [1996], por ejemplo, plantean un modelo de negociación multilateral en el que, en cada etapa, alguno de los jugadores, aleatoriamente escogido, debe proponer una repartición del objeto en cuestión; en caso de que tal propuesta sea aceptada por todos los jugadores, la repartición se lleva a cabo; en caso contrario, existe una probabilidad fija de que el jugador proponente sea retirado del juego. En tal escenario se obtiene como resultado el valor de Shapley en juegos con utilidad transferible; el valor consistente de Maschler-Owen en juegos con utilidad no-transferible; y la solución Nash de negociación en juegos de negociación pura[1].

Ahora: a partir de la propuesta de Kalai de recurrir a la invarianza ante descomposiciones del proceso de negociación en etapas, se podría pensar en el surgimiento de una variante frente al tratamiento clásico de los problemas de negociación, reconociendo que estos no son procedimientos que determinen como solución una única situación, sino que son *procesos que se llevan a cabo a través de varias etapas.* Así, un procedimiento diferente al clásico para el desarrollo de un problema de negociación consiste en subdividir el objeto total de la negociación en varias partes con el ánimo de evitar un cese en el proceso; en negociar tales partes de forma individual y secuencial; en establecer los acuerdos alcanzados como puntos de desacuerdo para etapas posteriores; y en continuar hasta agotar el objeto total de la negociación. De forma más sencilla, el procedimiento consiste en definir una *agenda de negociación* que contemple todos los puntos a ser negociados, y establecer acuerdos sobre cada uno de estos por aparte, con la condición de que llegado cierto punto, si no se logra alcanzar un acuerdo, se tiene como resultado del proceso el acuerdo alcanzado hasta el punto inmediatamente anterior al que generó el cese de las negociaciones.

La principal ventaja de particionar un problema de negociación consiste en facilitar la implementación de la solución a través de una reducción del riesgo de que fracase el proceso. A este respecto, Axelrod [1984] escribía:

> ... por ejemplo, un tratado de control de armamentos o de desarme podría ser descompuesto en muchas etapas intermedias; ello permitiría a las dos partes negociadoras ir avanzando con pasos relativamente pequeños en lugar de tener que dar uno o dos pasos grandes decisivos [...] si ambas partes supieran que a un paso impropio de la otra se puede responder con la decisión recíproca en la fase siguiente, *ambas partes tendrían más confianza en que el proceso funcionará como está previsto.* (Pp. 128 y 129, cursivas propias.)

Y, de forma específica, agregaba:

> ... el tener que dar muchos pasos pequeños ayudará más a promover la cooperación, que tener que dar solamente uno o dos muy importantes.

En la misma dirección, refiriéndose a la importancia de los acuerdos parciales en la generación de confianza, hace ya más de cuarenta años Schelling [1960] escribía:

> Si se consigue concluir cierto número de acuerdos, cada una de las partes puede estar dispuesta a arriesgar una pequeña inversión con el fin de

[1] Para la implementación de otro tipo de soluciones cooperativas ver, por ejemplo, Vidal-Puga [2003]

> crear una tradición de confianza. La finalidad perseguida es permitir que cada parte demuestre que comprende la necesidad de confianza y que sabe que la otra la comprende también. Así, si se tiene que negociar sobre un asunto importante, puede resultar necesario buscar y negociar otras cuestiones secundarias para "practicar"; para establecer la confianza necesaria de cada una de las partes en que la otra comprende el valor a largo plazo de la buena fe. Aun cuando no vaya a repetirse la situación en el futuro, cabe la posibilidad de crear una situación equivalente dividiendo la cuestión sujeta a negociación en partes consecutivas. (P. 62).

No obstante lo anterior, este enfoque ha recibido muy poca atención por parte de la literatura internacional. Wiener y Winter [1999] y Wiener, Winter, O´Neill y Samet [2002] llaman la atención sobre la prolífica discusión acerca de las soluciones estáticas (clásicas) de negociación, frente al corto camino recorrido en el análisis de problemas de negociación en los cuales *el conjunto de negociación se expande gradualmente*; es decir, problemas de negociación en los cuales previamente se ha establecido una agenda. De esta forma, plantean una trayectoria de solución a problemas de negociación gradual en la cual la "agenda" de negociación se considera exógena, a lo cual aducen:

> ... surgen, desde luego, importantes preguntas con respecto a la agenda. El resultado final de la negociación depende de la forma en que el pastel grande sea partido en pequeños pedazos. (Wiener y Winter [1999], p. 3).

Es decir, los resultados del proceso podrían cambiar dependiendo de la forma en que se estructure la agenda.

Como una aproximación a la idea de la *agenda de negociación*, es de destacar que al descomponer un problema de negociación en varias etapas, resulta usual encontrar que la agenda no se establece de forma previa o, de ser así, tal agenda es susceptible de ser modificada conforme avanza el proceso. Resulta natural pensar que las ofertas, exigencias y acuerdos que se llevan a cabo en etapas posteriores de la negociación, estarán fuertemente relacionados con aquellos alcanzados en etapas previas. Puede ocurrir que a medida que avanza el proceso una de las partes se haga más fuerte, lo que la llevaría a exigir más en cada etapa o, por el contrario, que el proceso mismo se encargue de igualar a las partes, de tal forma que aquella que sea más beneficiada en las primeras etapas deba ceder en las etapas posteriores. Así, es claro que existe la posibilidad de que se generen rendimientos crecientes, decrecientes o constantes a escala durante la negociación. Por lo tanto, es necesario reconocer el proceso de negociación como uno en el cual las partes enfrentan condiciones cambiantes, determinadas parcialmente por el azar y por la historia misma del proceso, en el cual ciertas posiciones de las partes pueden tomar más fuerza conforme las etapas avanzan[2]. Así, una posible aproximación para la modelación de la agenda de negociación

[2] Por ejemplo, Schelling [1960] destaca la importancia de los acuerdos iniciales en un proceso de

puede ser la consideración del proceso mismo como de tipo trayectoria-dependiente Arthur, Ermoliev y Kaniovski [1983, 1987]. (Ver, por ejemplo, Arévalo [2004]).

II. Modelos de Negociación Cooperativa

Como dijimos, en un problema de negociación el resultado es un acuerdo alcanzado por todas las partes involucradas (o el *statu quo* del problema), y está claro que centrarse en la toma de decisiones individuales no es suficiente para hacer predicción alguna acerca del mismo. No obstante, la teoría clásica de negociación asume que cada participante en la negociación decide entre los acuerdos posibles siguiendo la conducta predicha por el modelo de elección racional. En particular, se asume que las preferencias de cada jugador sobre los acuerdos posibles pueden representarse mediante una función de utilidad von Neumann-Morgenstern[3]. De esta forma, podemos entender un problema clásico de negociación como un conjunto de *asignaciones de utilidad conjuntas*, algunas de las cuales corresponderán a las que obtendrían si logran alcanzar un acuerdo, y otra al caso en el que no alcanzan ningún acuerdo.

A. Juegos de Negociación y Soluciones

En lo que sigue se asume que la negociación es sólo entre dos agentes ($n = 2$).[4] Podemos, entonces, definir formalmente un juego de negociación de la siguiente forma.

Definición 1. (Juego de Negociación)
Un *juego de negociación* de dos agentes es un par (F, d) donde $F \subset \mathbb{R}^2_+$ es el conjunto de asignaciones posibles de utilidad conjunta (posibles acuerdos), y $d \in F$ es el punto de desacuerdo[5]. Se asume que F es convexo, acotado, cerrado y comprehensivo[6] (figura 2).

negociación con una frase usual en este tipo de situaciones: "Si cedo ahora, usted revisará su opinión acerca de mí para nuestras futuras negociaciones; para defender mi reputación ante usted, debo mantenerme firme". p.45

[3]Es decir, se asume que las preferencias de cada agente satisfacen los axiomas de completitud, transitividad, independencia y continuidad, de la forma convencional (Mas-Colell, Whinston y Green [1995]).

[4]No hay pérdida de generalidad en este supuesto si se dejan como únicas opciones a los jugadores la unanimidad frente a un acuerdo o el desacuerdo total.

[5]Recuérdese que $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$.

[6]Esto es:

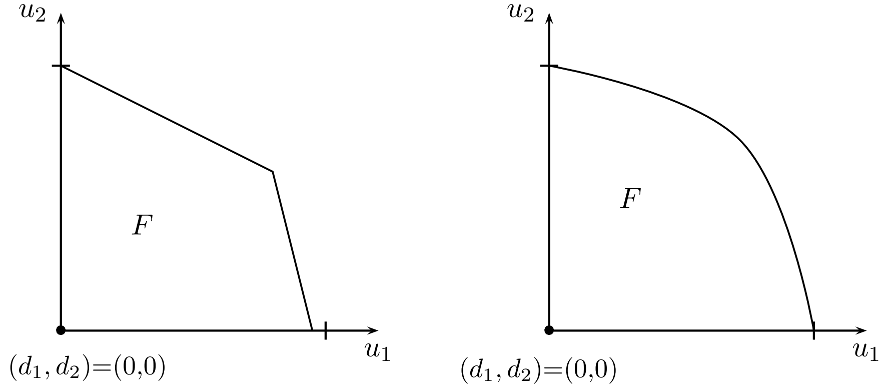
i. F es convexo si para todo $x, y \in F \subset \mathbb{R}^2$, y $\lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in F$.

ii. F es acotado si existe un $K > 0$ tal que para todo $x \in F, ||x|| \leq K$.

iii. F es cerrado si $\{x_n\}_n \subseteq F$ y $x_n \to x$, entonces $x \in F$

iv. F es comprehensivo si $x \in F$ y $x \geq y \geq 0$, implica $y \in F$.

Figura 2: Juego de Negociación



Definición 2 (Solución de Negociación)**.**
Si Λ denota al conjunto de *todos* los problemas de negociación posibles en $\mathbb{R}^2$, una *solución de negociación* es una regla $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^2_+$ que asigna, a cada problema de negociación (F, d), vectores de utilidad de la forma $\phi(F, d) = (\phi_1(F, d), \phi_2(F, d)) \in F$ (una para cada agente), correspondiente a la evaluación de su función de utilidad en la solución prescrita.

Puesto que cada posible solución de negociación podría satisfacer propiedades o criterios de eficiencia, equidad, simetría, etc., se han desarrollado varias soluciones de negociación, atendiendo cada una a diferentes criterios de "repartición" del objeto en cuestión. A continuación se presentan detalladamente, y de forma axiomática, algunas de las condiciones más estudiadas por la literatura internacional para, más adelante, relacionarlas con las principales soluciones de negociación.

B. Axiomas sobre los Juegos de Negociación

Si (F, d) es un problema de negociación cualquiera, estudiaremos algunas de las propiedades (axiomas) que la teoría clásica típicamente ha supuesto sobre él.

1. **Axiomas de eficiencia**
   Comencemos asumiendo que los agentes podrían agotar todas las ganancias posibles de la negociación. Es decir, el proceso de ésta genera resultados *eficientes.*

   Definiendo la *frontera* del conjunto de negociación F como

   $$\partial F = \{(x, y) \in F |\text{ no existe } (\hat{x}, \hat{y}) \in F, \text{ tal que } \quad \hat{x} > x, \hat{y} > y\}$$

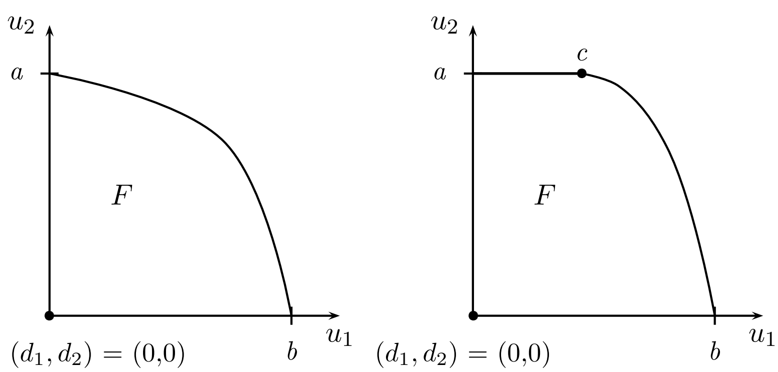
   tenemos el siguiente axioma:

   Axioma 1 (Eficiencia fuerte de Pareto)**.**
   La solución de negociación $\phi(F, d)$ es *eficiente*; es decir,

$$\phi(F,d) \in \{(x,y) \in F| \text{ no existe } (\hat{x},\hat{y}) \in F \text{ tales que } \hat{x} \geq x, \hat{y} > y, \\ \text{o } \hat{y} \geq y, \hat{x} > x.\}$$

Así, toda solución de negociación debe ser eficiente en el sentido de que no es posible mejorar a algún agente sin empeorar a otro; de esta manera, se agotan todas las ventajas extraíbles de la negociación. A esta condición también se le conoce como eficiencia *fuerte* de Pareto. Notemos que esta frontera corresponde a la "curva de contrato" de Edgeworth [1881]. En el primer panel de la figura 3, la solución debe estar en la curva <u>*ab*</u>; mientras que en el segundo panel, la solución debe estar en la curva <u>*cb*</u> pero *no puede estar* en la recta <u>ac</u>.

Figura 3: Eficiencia



Una condición menos restrictiva que la anterior se conoce como eficiencia débil de Pareto.

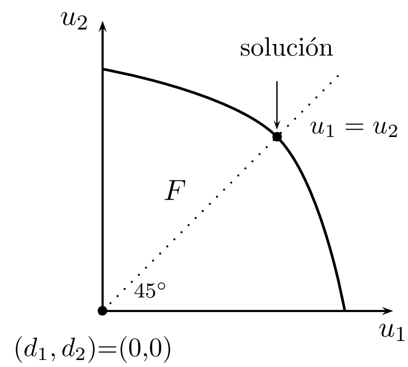
Axioma 2 (Eficiencia débil de Pareto)**.**
La solución de negociación $\phi(F,d)$ es *débilmente Pareto-eficiente*; es decir,

$$\phi(F,d) \in \{(x,y) \in F| \text{ no existe } (\hat{x},\hat{y}) \in F, \text{ con } \hat{x} > x, \hat{y} > y\}$$

Por lo tanto, para tener eficiencia débil de Pareto, sólo se requiere que no exista un resultado factible en el que *ambos agentes* estén estrictamente mejor (se agotan las ventajas *mutuas* de la negociación). Desde luego, si una solución es fuertemente eficiente es también débilmente eficiente. En el segundo panel de la figura 3, vemos que para satisfacer la eficiencia débil, la solución ya puede estar en la curva <u>*acb*</u> completa.

2. **Axioma de simetría**
Al abordar problemas de negociación se ha acostumbrado asumir que si las partes son simétricas (lo que corresponde a decir que tienen igual "poder de negociación") obtienen lo mismo en el acuerdo (Edgeworth [1881], Nash [1950a]). Nos referimos a un problema de negociación *simétrico* como aquel en el cual

Figura 4: Simetría



el punto de desacuerdo se ubica en la línea donde $u_1 = u_2$ y el conjunto de acuerdos factibles F es simétrico con respecto a tal línea (figura 4).

De esta forma, es natural exigir que la solución a un problema de negociación simétrico trate por igual a ambas partes.

Axioma 3 (Simetría)**.**
La solución de negociación $\phi(F, d) = (\phi_1(F, d), \phi_2(F, d))$ es *simétrica*; es decir, si $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | (y, x) \in F\} = F$, entonces $\phi_1(F, d) = \phi_2(F, d)$

En otras palabras, si el conjunto de pagos posibles no cambia cuando estos cambian de posición en la negociación, entonces recibirán lo mismo en la solución del problema.

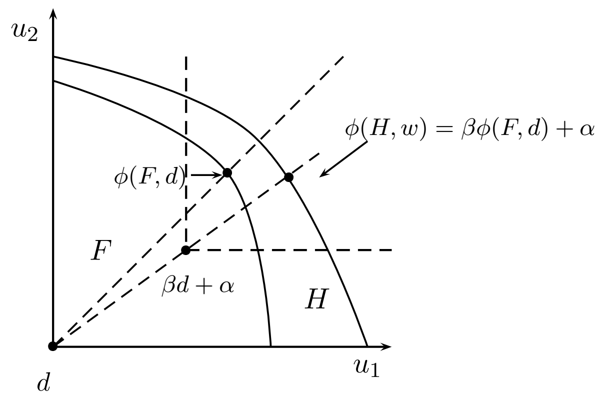
3. **Axioma de invarianza**
Pasamos ahora a analizar lo que ocurriría si cambiara la *escala de utilidad* de los agentes. Al estar considerando funciones de utilidad tipo von Neumann-Morgenstern, las soluciones a problemas de negociación deberían ser únicas módulo transformaciones afines. Así, establecemos el siguiente axioma.

Axioma 4 (Invarianza Escalar)**.**
Sea (H, w) el problema de negociación definido a través de (F, d), por $H = \beta F + \alpha$, y $w = \beta d + \alpha$, donde $\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}^2_+$; y $\phi(H, w)$ una solución de negociación de (H, w). Entonces, $\phi(H, w) = \beta\phi(F, d) + \alpha$ (figura 5).

Básicamente, lo que establece el axioma de invarianza escalar es que si el conjunto de negociación "se desplaza", la solución al nuevo problema de negociación también se desplaza en igual dirección y magnitud que el desplazamiento del conjunto. Esto implica que el cambio en el conjunto, causado por una modificación en la unidad de medida de la utilidad de al menos uno de los agentes, sólo modifica la solución en la variación de la escala. Es decir, la escala de utilidad que se utilice en la medida de las utilidades no debe afectar los resultados[7].

[7]Por tanto, es estándar asumir $d = (0, 0)$ en problemas de negociación clásicos.

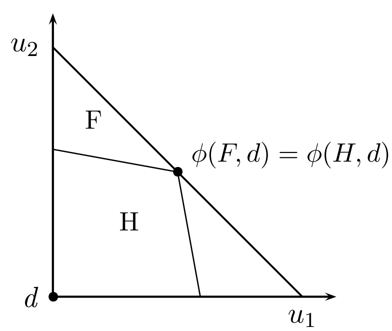
Figura 5: Invarianza Escalar



4. **Axioma de Independencia**
   El siguiente axioma se relaciona con aquellas *"contracciones"* en el conjunto de negociación en las que algunos de los resultados siguen siendo factibles.

   Axioma 5. (Independencia de Alternativas Irrelevantes)
   Si $\phi(F, d) \in H$ y $H \subset F$, entonces $\phi(F, d) = \phi(H, d)$.

Figura 6: Independencia de Alternativas Irrelevantes



   Así, la solución de un problema de negociación, cuando se reduce el conjunto de resultados factibles, no se debe ver afectada por resultados que, al ser asequibles, no fueron elegidos (figura 6). Como veremos más adelante, esta hipótesis es quizás la más problemática.

C. Soluciones a los Juegos de Negociación

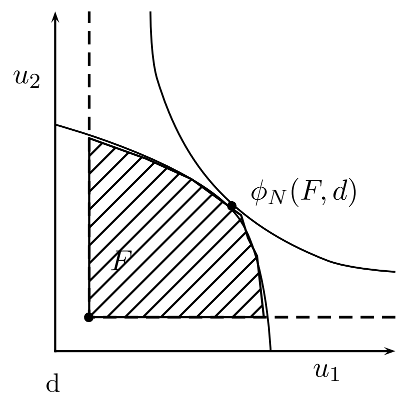
Analicemos, entonces, algunas de las soluciones de negociación más conocidas a la luz de los axiomas anteriores.

1. ***Solución Nash de Negociación***
   Originalmente, Nash [1950a] construyó la *solución Nash de negociación* $\phi_N(F, d)$

como aquella que *maximiza el producto de las utilidades de los agentes sobre el conjunto de negociación*:

$$\phi_N(F,d) \in \text{argmax}(x-d_1)(y-d_2)$$
$$\text{s.a. } x,y \in F$$
$$x,y \geq d_i$$

Figura 7: Solución Nash de Negociación



Es fácil probar (utilizando el lagrangiano del problema de optimización anterior) que si la frontera de Pareto de F es suave y está determinada por una ecuación de la forma $H(x,y) = 0$, esta frontera y la curva $(x-d_1)(y-d_2) = t$ para algún t, tienen una tangente en común. Esto es, en la solución Nash de negociación, el gradiente[8] de la función que determina la frontera de Pareto $(H_x(x,y), H_y(x,y))$, y el gradiente del "producto de Nash" (y,x), están relacionados así:

$$\frac{H_x(x,y)}{H_y(x,y)} = \frac{y-d_2}{x-d_1}$$

Esta condición muestra la necesariedad de los dos jugadores en la negociación. Observemos que, a diferencia de maximizar el producto de las utilidades, maximizar, por ejemplo, la suma de las utilidades podría darle todo a un jugador y nada al otro, y tal resultado sería indiferente a uno en el que se le diera la mitad del objeto a cada uno; la solución de Nash excluye tales casos reconociendo la importancia de *ambos jugadores* en la determinación del acuerdo final. De hecho, la solución Nash reconoce más que eso:

Teorema 1 (Nash [1950a]).
La solución Nash de negociación es la única que satisface los axiomas de eficiencia fuerte de Pareto, simetría, invarianza escalar e independencia de las alternativas irrelevantes.

[8] El gradiente de una función $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es el vector de derivadas parciales $(\partial H/\partial x, \partial H/\partial y)$, que también se escribe (H_x, H_y).

Demostración.
Ver Nash [1950a] □

Ejemplo 1.

1. Sea $F = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, \text{ para todo } x > 0, y > 0\}$
   $d_1 = d_2 = 0$. Encontremos la solución Nash de negociación.

   Este problema puede interpretarse como uno en el que los dos jugadores obtienen un pago de 1 o menos (conjuntamente) si logran ponerse de acuerdo respecto a alguna repartición, y cero en caso contrario; encontrar la solución Nash de negociación en este problema equivale a:

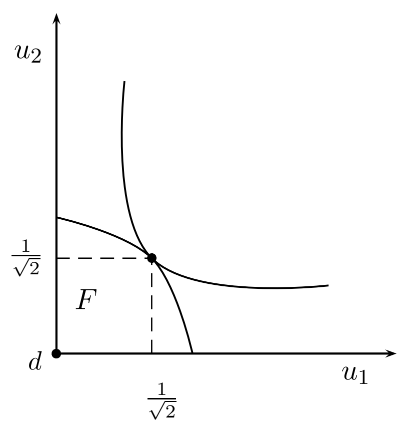
   $$\max_{x,y} \quad xy \quad \text{sujeto a:} \qquad x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

   A partir de las condiciones de primer orden, es fácil mostrar que

   $$\phi_N(F,(0,0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   (Ver figura 8).

Figura 8: Solución Nash de Negociación



2. Consideremos ahora $d = (0{,}8, 0{,}2)$, y encontremos nuevamente la solución Nash de negociación.

   En este caso, el problema consiste en resolver

   $$\max_{x} (x - 0{,}8)[(1 - x^2)^{1/2} - 0{,}2]$$

   A partir de las condiciones de primer orden encontramos

$$\phi_N(F,(0{,}8,0{,}2)) = (0{,}90536, 0{,}42464)$$

Notemos de lo anterior que incrementar la utilidad que el jugador 1 obtiene en el desacuerdo por encima de lo que obtiene el jugador 2, hace que aquel obtenga una mayor utilidad con respecto a este último, y con respecto a lo que obtenía en el caso simétrico. Así, podemos ver que la posición de cada uno de los jugadores en caso de desacuerdo incide sustancialmente en el pago que estos obtienen en caso de alcanzar un acuerdo.

$\triangle$

Ejemplo 2 (Soborno y Control del Crimen (Muthoo [2001])).
Un individuo I está decidiendo si comete o no un crimen en el que robaría una cantidad de dinero $\pi > 0$. Si decide cometer el robo, hay una probabilidad fija α de ser capturado por un policía P. El policía es sobornable, y en caso de capturar al ladrón, negocia con éste un soborno b que I entregaría a P a cambio de que no sea llevado a una estación de policía. Los posibles acuerdos son todas las reparticiones posibles que pueden hacer del botín robado: $\{(\pi - b), b)$ tal que $0 \leq b \leq \pi\}$. En caso de que no logren un acuerdo, el policía lleva al ladrón a la estación donde este último tendría que pagar una multa πv del total robado, donde $v \in (0,1]$ es la tasa de penalización. Asumimos que ambos agentes son neutrales al riesgo.

En caso de que el ladrón sea capturado debe negociar con el policía el soborno b que debe ser pagado; luego, de acuerdo con la solución Nash de negociación, debemos resolver el problema

$$\max_b [\pi - b - \pi(1-v)](b)$$

Así, $b = \dfrac{\pi v}{2}$. De esta forma, la solución Nash de negociación establece las siguientes utilidades:

$$\begin{aligned} U_I &= \pi\left(1 - \frac{v}{2}\right) \\ U_P &= \frac{\pi v}{2} \end{aligned}$$

Notemos que la tasa de penalización afecta positivamente el soborno que debe ser pagado aunque tal pago efectivamente nunca se realice. Ahora: para determinar si el individuo efectivamente decide cometer el crimen, calculemos su utilidad esperada:

$$\begin{aligned} U_I^E &= \alpha\pi\left[1 - \left(\frac{v}{2}\right)\right] + (1-\alpha)\pi \\ &= \pi\left(1 - \frac{\alpha v}{2}\right) \end{aligned}$$

luego el individuo no comete el crimen si, y sólo si, $\alpha v \geq 2$. Pero como $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 < v \leq 1$, entonces $\alpha v < 1$ para toda tasa de penalización y toda probabilidad de captura, y así el crimen siempre se realiza. Obsérvese que esto coincide con la intuición general de que mayores penalizaciones no ayudan en la lucha contra el crimen si estas no van acompañadas de campañas institucionales en contra de la corrupción. Es decir, según este modelo, la lucha contra el crimen se gana atacando la corrupción y no incrementando las penalizaciones. △

Nota 1.
Para situaciones en que los jugadores presenten diferente "*poder de negociación*"[9], se utiliza lo que se conoce como *el producto de Nash generalizado*, donde la solución de negociación maximiza la expresión $(x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta$, siendo $\alpha, \beta > 0$ "indicadores" de tal poder de negociación de los jugadores 1 y 2 respectivamente.

2. ***Solución Kalai - Smorodinsky (1975)***
Como dijimos en la introducción, Kalai y Smorodinski [1975] cuestionaron la solución ofrecida por Nash debido a la existencia de amplias críticas recibidas por el axioma de *independencia de alternativas irrelevantes* (Luce y Raiffa [1957]) y, sumado a esto, proponen el siguiente ejemplo, en el que utilizar la solución de Nash arroja resultados contraintuitivos.

Ejemplo 3 (Kalai y Smorodinski [1975]).
Consideremos el problema de negociación (F_1, d) donde $d = (0,0)$, y F_1 es el conjunto de los pares (x, y) que satisfacen lo siguiente:

$$0 \leq x \leq 1$$
$$y = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{3}x & \text{si } x \leq 3/4 \\ 3(1-x) & \text{si } x \geq 3/4 \end{cases}$$

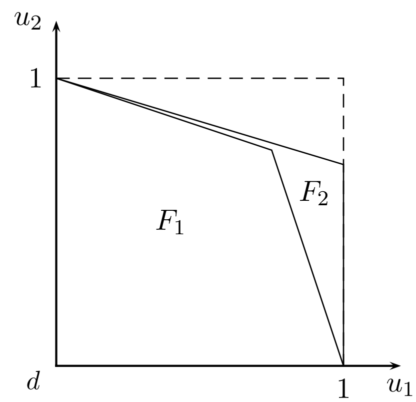
De forma similar, construyamos (F_2, d) con $d = (0,0)$ y F_2 igual al conjunto de los pares (x, y) que satisfacen:

$$0 \leq x \leq 1$$
$$y = \begin{cases} 1 - 0{,}3x & \text{si } x < 1 \\ \text{el intervalo } [0, 0{,}7] & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Notemos que para todo valor fijo de x $(0 < x < 1)$ existe un valor de y para el cual $(x, y) \in \partial F_2$ y un valor de z para el cual $(x, z) \in \partial F_1$ y $y > z$. Por lo tanto, el jugador 2 tiene motivos suficientes para exigir más en el segundo problema

[9] A causa de su aversión al riesgo, información disponible, etc.

Figura 9: Problemas con la Solución Nash



de negociación con respecto a lo que obtendría en el primero; sin embargo, es fácil probar que la solución Nash de negociación asigna los siguientes pagos:

$$\phi_N(F_1, d) = (0{,}75, 0{,}75)\,, \text{ y}$$
$$\phi_N(F_2, d) = (1, 0{,}7)$$

luego la "ventaja" que esperaría el jugador 2 a causa de la expansión del conjunto de negociación no se traduce en una mayor utilidad en la solución al problema. △

Para subsanar esta deficiencia de la solución de Nash, los economistas Kalai y Smorodinski [1975] reemplazan el axioma de independencia de alternativas irrelevantes por uno de monotonicidad, y proponen una nueva solución que veremos enseguida.

Axioma 6 (Monotonicidad Fuerte)**.**
Si $F \subseteq F'$, entonces $\phi_i(F, d) \leq \phi_i(F', d)$ para $i = 1, 2$.

Es decir, al expandirse el conjunto de posibles acuerdos, ambos agentes deben verse beneficiados (o al menos no deben empeorar). Tomemos como ejemplo a dos individuos que están decidiendo cómo repartirse una unidad monetaria. Si, adicional a esto, se les diera otra unidad monetaria, entonces, de acuerdo con el axioma de monotonicidad, ninguno de los dos debería verse perjudicado con respecto al acuerdo que alcanzaban cuando sólo se repartían la unidad monetaria inicial. No obstante, en algunos casos es posible que la expansión del conjunto favorezca a uno solo de los agentes, luego en tales casos no sería correcto esperar que ambos se vieran beneficiados. El axioma de monotonicidad individual se centra en estas situaciones.

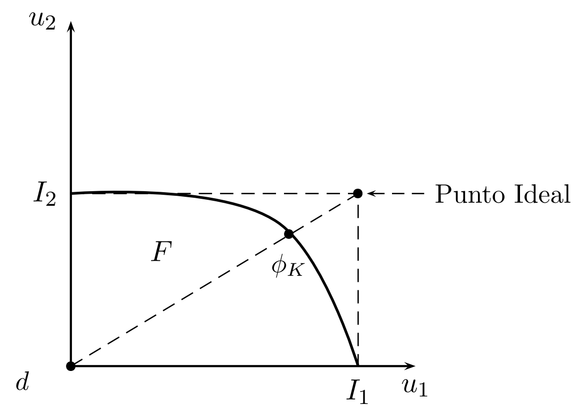
Axioma 7 (Monotonicidad Individual)**.**
Sea $a_i(F, d)$ la utilidad máxima posible del jugador i en el problema de negociación (F, d). Si $F \subseteq F'$ y $a_i(F) = a_i(F')$, entonces $\phi_i(F, d) \leq \phi_i(F', d)$.

Notemos que si se satisface la condición de monotonicidad fuerte, se tiene inmediatamente la de monotonicidad individual.

Siguiendo con el ejemplo 3 inmediatamente anterior, consideremos el caso en que sólo uno de los individuos realiza una labor que le permite tener derecho a recibir la unidad monetaria adicional. De acuerdo con el axioma de monotonicidad individual, el individuo que realiza esta labor no debería verse perjudicado con respecto al acuerdo que se alcanza cuando sólo hay una unidad monetaria, sólo por el hecho de que una nueva unidad sea ahora parte de la negociación.

Definiendo el "punto ideal" $I(F,d)$ de un problema de negociación (F,d), donde $I_i(F,d) = \text{máx}\{x_i | x \in F, \text{ para todo } i\}$, la solución Kalai-Smorodinsky $\phi_K(F,d)$ es el punto en la frontera del conjunto factible que conecta el punto de desacuerdo con el punto ideal (figura 10).

Figura 10: Solución Kalai-Smorodinski



Así, la solución Kalai-Smorodinski es el único punto en la frontera eficiente en el cual

$$\frac{(y-d_2)}{(x-d_1)} = \frac{(I_2(F,d)-d_2)}{(I_1(F,d)-d_1)}$$

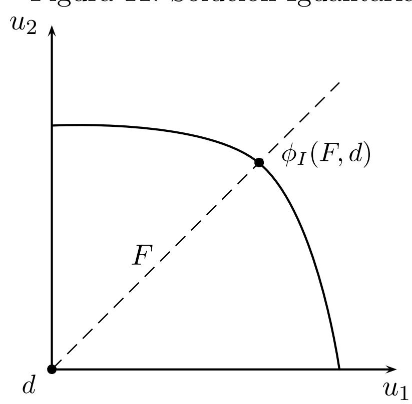
Teorema 2 (Kalai y Smorodinski [1975])**.**
La solución Kalai-Smorodinski es la única que satisface los axiomas de eficiencia débil de Pareto, simetría, invarianza escalar y monotonicidad individual.

Demostración.
Ver Thomson [1994] □

Cuestionando la solución Nash de negociación, notemos que la solución Kalai-Smorodinski en el ejemplo 1, es (0,75, 0,75) en el primer caso (la misma de Nash), pero es (0,769, 0,769) en el segundo, lo cual muestra que, efectivamente, tiene en cuenta la posición favorable que esperaría el jugador 2 a causa de la expansión del conjunto.

3. ***Solución Igualitaria*** (Kalai [1977])
   Dos años después de presentar la solución Kalai-Smorodinsky, el mismo Kalai desarrolla otra posible opción como resultado de una negociacíón. La solución igualitaria de un juego de negociación (F, d), $\phi_I(F, d)$, divide por partes iguales entre los agentes las ganancias resultantes de la negociación. Esto es, para todo problema de negociación (F, d), $\phi_I(F, d)$ es el vector en la frontera de F cuyas coordenadas son iguales. Así, *la solución igualitaria maximiza la función de bienestar social* $\text{mín}\{x, y\}$ sobre F (Figura 11). Lo anterior equivale a que siempre $y - d_2 = x - d_1$.

Figura 11: Solución Igualitaria



Teorema 3 (Kalai [1977]).
La solución igualitaria es la única que satisface los axiomas de simetría, eficiencia débil y monotonicidad fuerte.

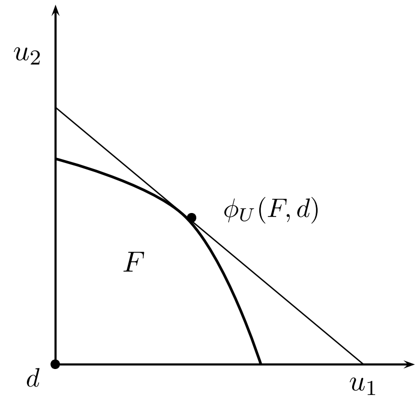
Demostración.
Ver Thomson [1994]. □

Soluciones igualitarias aparecen con frecuencia en negociaciones informales. Situaciones en las que un agente pide una concesión al otro a cambio de lo que éste ha hecho (o está haciendo) por él, son una evidencia de esto. Nótese la comparación de utilidades implícita que hay en argumentos como este.

4. ***Solución Utilitaria*** **(Harsanyi [1977])**
   Otra posibilidad en el resultado de una negociación fue planteada por el mismo Harsanyi en 1977. La solución utilitaria $\phi_U(F, d)$ maximiza la suma de las utilidades individuales. Es decir, $\phi_U(F, d) = \text{argmax}(x+y)$ sobre F (figura 12).

Teorema 4 (Harsanyi [1977]).
La solución utilitaria es la única que satisface los axiomas de eficiencia fuerte y simetría.

Figura 12: Solución Utilitaria



Demostración.
Ver Thomson [1994] □

Al igual que en la solución anterior, soluciones utilitarias también aparecen con frecuencia en negociaciones informales y también conllevan comparaciones interpersonales de utilidad. Frases como "haz esto por mí porque esto me beneficia más a mí de lo que te perjudica a ti", son un ejemplo de lo que está implícito allí.

Analicemos ahora un ejemplo en el cual, para un problema de negociación específico, podamos hallar las cuatro soluciones de negociación que hemos presentado.

Ejemplo 4.
Sea $d = (0, 0)$, y sea $F = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq (1 - x)^{1/2}\}$. Este juego puede ser interpretado como un problema de negociación en el cual dos agentes deben repartirse una unidad monetaria. Si logran llegar a un acuerdo, obtienen, en conjunto, tal unidad; si no logran llegar al acuerdo, ambos obtienen cero. El agente 1 es neutral al riesgo, mientras el 2 es averso al riesgo. Calculemos las diferentes soluciones expuestas arriba.

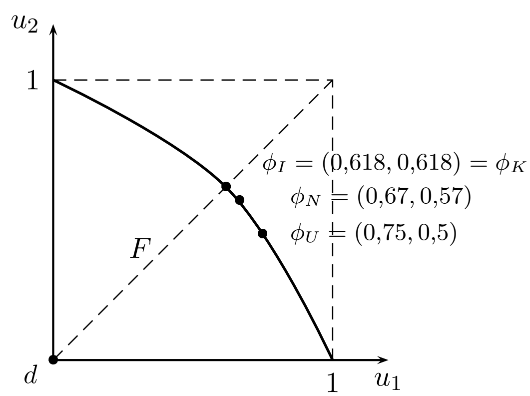
a. *Solución Nash de negociación*: para encontrar la solución de Nash, debemos encontrar el valor máximo de la función $x \cdot (1 - x)^{1/2}$. Derivando la condición de primer orden obtenemos $x = 2/3 = 0{,}666, y = (1/3)^{1/2} = 0{,}577$.

b. *Solución Kalai-Smorodinsky*: inicialmente, es necesario tener en cuenta que $I_1 = I_2 = 1$, y que $d_1 = d_2 = 0$. De esta forma, reemplazando en la expresión que caracteriza a esta solución tenemos $y/x = 1$, por lo que $x = (1 - x)^{1/2}$, y así $x = y = 0{,}618$.

c. *Solución igualitaria*: como $d_1 = d_2 = 0$, debemos tener $x = y$; de esta forma $x = (1 - x)^{1/2}$, con lo cual se obtiene $x = y = 2/3$. Pero como este punto está por fuera del conjunto factible, la solución igualitaria será (0.618, 0.618), que sí pertenece a la frontera del conjunto.

d. *Solución utilitaria*: para esta solución necesitamos encontrar el valor máximo de la función $x + (1 - x)^{1/2}$. Calculando la condición de primer orden y despejando, obtenemos $x = 0{,}75, y = 0{,}5$.

Figura 13: Soluciones de Negociación



Las soluciones anteriores pueden observarse en la figura 13. Notemos que, *en este caso particular*, las soluciones igualitaria y Kalai - Smorodinsky coinciden, lo cual en general no tiene que ocurrir. Esto puede verse fácilmente si, por ejemplo, la cantidad a repartir fuera diferente de 1. De otro lado, notemos cómo *la solución Nash de negociación "penaliza" al agente más averso al riesgo* en cuanto a su participación de la unidad monetaria y, por consiguiente, también en cuanto a su utilidad: para la solución Nash, la actitud de un agente averso al riesgo frente a la posibilidad de que la negociación fracase y obtenga la utilidad del desacuerdo hace que éste acepte acuerdos que le generan una menor utilidad que la que obtendría si estuviera dispuesto a "correr riesgos" y, por ejemplo, exigir un poco más en la negociación.

△

Ejemplo 5 (Negociación Sindical)**.**
Los directivos de una empresa y su sindicato están negociando sobre las acciones que se desarrollarán el próximo año. Puede acordarse la construcción de una sede deportiva (A) o un alza general de salarios (B); en caso de que no logren llegar a un acuerdo se iniciará una huelga (C). Supongamos que las partes pueden encontrar variables con cualquier distribución de probabilidad deseada y que pueden condicionar su decisión en ésta. Los directivos de la empresa están interesados principalmente en la construcción de la sede deportiva, y un alza general de salarios es considerada igual de indeseable al inicio de una huelga. Para el sindicato lo mejor sería un alza general de salarios, lo peor sería iniciar la huelga, y serían indiferentes entre la construcción de la sede deportiva y una lotería que con probabilidad 1/4 genere un alza de salarios y con probabilidad 3/4 el inicio de la huelga. Si ambas partes satisfacen los axiomas de la teoría de la utilidad esperada, encontremos, para este problema, las soluciones de negociación que hemos presentado.

Lo primero que podemos hacer es establecer esta situación como un problema de negociación. Aquí,

$$\begin{aligned} &F = \{pU_D(A) + (1-p)U_D(B), pU_S(A) + (1-p)U_S(B) | p \in [0,1]\} \\ &d = (U_D(C), U_S(C)) \end{aligned}$$

donde p es la probabilidad de que se construya la sede deportiva, U_S es la utilidad del sindicato, y U_D es la utilidad de las directivas. Ahora: es necesario también encontrar la escala de utilidad de cada una de las partes; para esto tengamos en cuenta que:

1. *Para los directivos:*
   $U_D(A) > U_D(B), U_D(A) > U_D(C), U_D(B) = U_D(C)$; como la opción preferida es A y la peor opción es C, podemos hacer una normalización de tal forma que $U_D(A) = 1, U_D(C) = 0$, con lo cual se obtiene $U_D(B) = 0$.

2. *Para el Sindicato:*
   $U_S(B) > U_S(C), U_S(A) = 1/4U_S(B) + 3/4U_S(C)$. Haciendo una normalización igual al caso anterior, tenemos: $U_S(B) = 1, U_S(C) = 0$, $U_S(A) = 1/4$.

a. Como la solución Nash de negociación maximiza el producto de las utilidades de los agentes, necesitamos encontrar una distribución de probabilidad sobre los dos posibles resultados de tal forma que el producto de las utilidades esperadas de los agentes sea el más alto posible; es decir, necesitamos solucionar el siguiente problema:

$$\max_p \, [pU_D(A) + (1-p)U_D(B)][pU_S(A) + (1-p)U_S(B)]$$

Reemplazando los valores encontrados arriba, obtenemos:

$$\max_p \left[p \left(\frac{p}{4} + (1-p) \right) \right]$$

La condición de primer orden de este problema es $1 - (3p/2) = 0$, y por tanto la distribución de probabilidad que buscamos es (2/3,1/3); reemplazando en las funciones de utilidad esperada, la solución Nash de negociación es

$$\phi_N = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right)$$

b. Para encontrar la solución utilitaria necesitamos solucionar

$$\max_p p + \frac{p}{4} + 1 - p$$

luego la distribución de probabilidad buscada es $(1,0)$, con lo cual la solución utilitaria es $\phi_U = (1, 1/4)$.

c. Para encontrar la solución igualitaria hacemos $p = \dfrac{p}{4} + 1 - p$, con lo que obtenemos $p = 4/7$, y $\phi_I = (4/7, 4/7)$.

d. Finalmente, para encontrar la solución de Kalai y Smorodinski, notemos que la utilidad máxima que cada uno de los jugadores puede obtener es 1, luego la relación de utilidades en el punto ideal es también 1. Necesitamos entonces encontrar un p tal que $(1 - (3p/4))/p = 1$, es decir, $p = 4/7$, con lo cual la solución de Kalai y Smorodinski y la solución igualitaria coinciden.

Notemos que, en este ejemplo, encontrar una solución de negociación corresponde a encontrar la distribución de probabilidad que maximiza cierta función objetivo. Esto se percibe con frecuencia en negociaciones reales cuando se observa a las partes supeditar un acuerdo a cierto resultado de otra variable que, en general, tiene una distribución de probabilidad conocida. Un ejemplo de esto es condicionar un alza de salarios a la superación de la cuota de ventas de cierto período de tiempo, o atar tal alza, por ejemplo, al incremento en el índice de precios. Notemos, por otro lado cómo las soluciones igualitaria y Kalai-Smorodinski eligen la distribución de probabilidad más equitativa, mientras la utilitaria busca favorecer exclusivamente al jugador 1. La solución Nash, por su parte, al maximizar el producto de las utilidades de los agentes, elige una distribución de probabilidad que, si bien favorece más al jugador 1, no desconoce la importancia del jugador 2.

$\triangle$

Es importante destacar que las soluciones utilitaria y Nash de negociación tienen una similitud importante en cuanto a que la primera de estas establece como un resultado de la negociación una asignación de utilidades en la cual un incremento en la utilidad de un jugador no sea mayor a la reducción en la utilidad del otro; por su parte, la solución Nash de negociación parte del mismo principio pero en términos relativos; es decir, una asignación de utilidades es la solución Nash de negociación si no existe otra asignación en la que un jugador incremente *porcentualmente* su utilidad más de lo que se reduce la utilidad del otro. Para ver esto en detalle consideremos el siguiente ejemplo

Ejemplo 6 (Young [1991a,b])**.**
Ramón y Lina han recibido iguales participaciones de la herencia de sus padres. La propiedad consiste en $200.000 en efectivo y 100 hectáreas de tierra. A Lina le gusta el dinero pero tiene un valor sentimental por la tierra. Ramón, por su parte, tiene poco ingreso y no le interesa la tierra, excepto por lo que podría obtener de ella en caso de venderla. Lina sería indiferente entre recibir toda la tierra o un pago de $300.000, mientras Ramón es indiferente entre recibir toda la tierra y un pago de $100.000 que sería lo que obtendría en la venta. Asumimos que ambos hermanos tienen tasas de cambio fijas entre dinero y tierra; esto es, Ramón valora cada hectárea en $1.000, mientras Lina valora cada hectárea en $3.000.

Midiendo la utilidad de cada uno de los jugadores en términos monetarios, encontremos las dos soluciones de negociación mencionadas.

Dado que Lina valora cada hectárea de tierra más que Ramón, entonces ella debería tener toda la tierra. Sin embargo, dado que los dos valoran de la misma forma el dinero, entonces cualquier repartición de dinero estaría acorde al principio utilitarista; incluso la condición de que todo el dinero lo tuviera Lina.

Ahora, consideremos una situación en la que Ramón termina con todo el dinero (\$200.000) y Lina termina con toda la tierra (a la que le asigna un valor monetario de (\$300.000). Si transfiriéramos una hectárea de tierra de Lina a Ramón, la utilidad de Ramón se incrementaría en 1.000/200.000=0.5 %, mientras que la de Lina se reduciría en 3.000/300.000=1 %, luego tal transferencia no debería realizarse. Es decir en la solución Nash de negociación Lina recibe toda la tierra y Ramón todo el dinero.

△

Las soluciones de negociación utilitaria e igualitaria que hemos visto, están estrechamente relacionadas con la solución Nash de negociación

Teorema 5 (Soluciones λ-igualitaria y λ-utilitaria).
La asignación de utilidades $\phi_N(F,d)$ es la solución Nash de negociación, si existen números positivos λ_1, λ_2 tales que

$$\lambda_1 x - \lambda_1 d_1 = \lambda_2 y - \lambda_2 d_2 \tag{1}$$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = \max_{x,y \in F} \lambda_1 x + \lambda_2 y \tag{2}$$

Demostración.
Ver Myerson [1991] □

Las asignaciones de utilidad "λ-igualitaria" y "λ-utilitaria", y surgen utilizando un criterio similar a los de las soluciones iniciales incluyendo diferentes ponderaciones para cada uno de los jugadores.

Ejemplo 7.
Encontremos las soluciones "λ-igualitaria" y "λ-utilitaria" para el ejemplo 4.

Solución
En la solución Nash de negociación habíamos obtenido $x_1 = 2/3, x_2 = 1/\sqrt{3}$. Utilizando el teorema 5 y haciendo $\lambda_1 = 1$, encontramos

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}1547$$

De esta forma, si multiplicamos la utilidad del jugador 1 por λ_1 y la del jugador 2 por λ_2 =1.1547, $\lambda_1 x_1$ y $\lambda_1 x_2$ son las soluciones λ-igualitaria y λ-utilitaria. Para ver esto, encontremos las soluciones utilitaria e igualitaria en donde la única diferencia con el problema original consiste en "escalar" la utilidad del jugador 2 multiplicándola por una constante $K = 1{,}1547$, lo cual debería ser irrelevante. Así:

$$G = \{(y_1, y_2) | 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1{,}1547(1 - y_1)^{\frac{1}{2}}\}$$

Con la misma metodología que hemos utilizado, encontramos como soluciones igualitaria y utilitaria $y_1 = 2/3, y_2 = 2/3$. Luego $x_1 = 2/3, x_2 = 1/\sqrt{3}$ es la solución Nash de negociación, la solución λ-igualitaria, y la solución λ-utilitaria con $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1{,}1547)$.

$\triangle$

D. Una Nota sobre Evidencia Experimental (Roth y Murnighan [1978])

Como era tal vez de esperarse, la evidencia empírica, no-controlada referente a problemas de negociación es bastante reducida, y por tanto ha sido necesario recurrir a la herramienta experimental para poner a prueba las hipótesis de esta teoría. En particular, la solución de Nash establece que el resultado de la negociación está determinado por las preferencias de los negociadores sobre el conjunto de alternativas posibles y su deseo de tolerar el riesgo. En los primeros experimentos realizados en el área, dos jugadores debían repartirse una cantidad monetaria, asumiendo que la utilidad de cada agente correspondía al total del dinero obtenido. Sin embargo, esto implicaba asumir de antemano que los agentes eran neutrales al riesgo y los resultados obtenidos fueron en dirección contraria a la teoría. No obstante, las fallas obtenidas fueron ignoradas, presumiéndose que si había alguna ésta debería estar relacionada con los parámetros relevantes: a fin de cuentas, en la solución de Nash las preferencias y la aversión al riesgo son los únicos determinantes del resultado de la negociación, y en estos experimentos se habían supuesto exógenos. De esta forma, para tener mejores experimentos era necesario medir o controlar las utilidades de los agentes.

Roth y Malouf [1979] diseñaron un experimento en el cual se negociaban tiquetes de lotería; cada negociador podía ganar uno de dos premios λ_i y σ_i con $\lambda_i > \sigma_i$. Si, por ejemplo, un jugador tenía al final de la negociación el 70 % de los tiquetes de lotería, esto quería decir que podía ganar λ_i con una probabilidad del 70 %. Si no alcanzaban un acuerdo, ganarían cada uno σ_i. Dada la invarianza escalar, no hay problema en asumir $u_i(\lambda_i) = 1, u_i(\sigma_i) = 0$. Asimismo, la utilidad para los demás resultados será igual al porcentaje de tiquetes de lotería que obtuviera el agente. De acuerdo con los supuestos de la teoría, los resultados relevantes no deberían depender de la escogencia de λ_i y σ_i. Vale la pena notar que en estos experimentos hay información completa; esto es, cada jugador conoce la probabilidad de ganar, por lo cual conoce la utilidad de cada uno de los agentes. En este escenario, *el resultado de la negociación no debe depender de los premios, ni del hecho de conocer o no su valor monetario*; esto es, precisamente, lo que se buscaba probar. Se empieza haciendo $\sigma_i = 0$. Los premios grandes (λ_i) podrían o no ser iguales entre los jugadores. En caso de no serlo, se estableció una relación de 1 a 3 entre estos. En los experimentos, los jugadores no se conocen y se comunican por medio de mensajes de texto a través de terminales de computador.

Se diseñaron dos escenarios; en el primero de ellos (información total) cada jugador conoce ambos premios. En el segundo (información parcial), cada jugador sólo conoce su propio premio. En ambos escenarios, la teoría predice una repartición 50: 50. Sin embargo, esto sólo fue así cuando los premios eran iguales o cuando la información era parcial. Si los premios eran diferentes, los resultados se inclinaron hacia una igualación de los valores esperados; es decir, el jugador con un menor premio obtuvo una mayor parte de los tiquetes de lotería. Contrariamente a lo que predice la teoría, de aquí se puede concluir que "los premios importan".

Roth, Malouf y Murnighan [1981] crearon otro experimento para determinar si era posible crear puntos focales arbitrarios. Cada pareja negocia fichas con un cierto valor monetario. Cada jugador conoce el valor de sus fichas, mientras el valor de las fichas del otro se utilizó como variable experimental. Se crearon tres escenarios distinguiendo información baja, intermedia y alta. El primero y último caso replicaron los resultados que se tenían previamente. En el caso con información intermedia (cada jugador conoce el valor de las fichas del otro pero no su premio) los resultados fueron bastante similares a los de información parcial. De esta forma, *existe un problema con el valor de los premios, que termina generando la aparición de puntos focales.*

En cuanto a la aversión al riesgo, como vimos en el ejemplo 4, a medida que ésta es mayor para un agente, su resultado en la negociación será peor. Este resultado es bastante general, a menos que existan acuerdos peores que el punto de desacuerdo. En el diseño de experimentos al respecto, era necesario medir las preferencias de los agentes, para lo cual se consideraron loterías con tres premios λ_i, σ_i y δ_i. Después de haberse encontrado diferencias significativamente grandes en la aversión al riesgo entre los participantes, se formaron parejas con un agente altamente averso frente a otro con baja aversión. En un primer juego, el punto de desacuerdo era mayor que el premio menor, y en un segundo juego esta relación se invertía. Las predicciones de la teoría sobre estos juegos son que el agente más averso se vería relativamente beneficiado en el primer juego y perjudicado en el segundo. Específicamente, no sólo el jugador más averso debe ganar más en el primer juego que en el segundo, sino que debe obtener más del 50 % de los tiquetes en el primer juego, y menos del 50 % en el segundo, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Los resultados obtenidos muestran que el "efecto punto focal" es mayor que el impacto de la aversión al riesgo. Básicamente, la aversión al riesgo genera un impacto en la dirección esperada pero, cuantitativamente, bastante reducido. Aparte de lo anterior, son de destacar las regularidades encontradas en cuanto a la frecuencia de los desacuerdos y al alto número de acuerdos alcanzados sobre el momento límite de la negociación.

Ejercicios 1.

1. Para el problema del ejemplo 5:

    a. Encuentre la solución Kalai-Smorodinski.

b. En qué cambian los resultados de la solución Nash de negociación del ejemplo 3 si en caso de que se inicie la huelga el sindicato hace efectivas algunas demandas legales que tenía contra las directivas de tal forma que para estas el desacuerdo (inicio de la huelga) se convierte en una situación peor; específicamente, los directivos ahora serían indiferentes entre un alza general de salarios y una lotería en la que, con probabilidad 2/3 se construye la sede deportiva y con probabilidad 1/3 se inicia la huelga. Las demandas legales no cambian las preferencias del sindicato respecto a los estados posibles.

2. Considere un problema de negociación de repartir un dólar donde $u(x) = x$ para el jugador 1, y $v(y) = 2y - y^2$ para el jugador 2, y x e y son tomados del intervalo $[0, 1]$.

   a. Dibuje el conjunto de negociación.

   b. Encuentre la solución Nash de negociación.

   c. Encuentre la solución utilitaria.

3. Encuentre la solución Nash de negociación para el problema de dividir un peso si las funciones de utilidad de los jugadores son:

   a. $u(x) = x$, mientras

$$v(y) = \begin{cases} 1{,}2y & \text{para } y \in [0, 0{,}75], \\ 0{,}6 + 0{,}4y & \text{para } y \in [0{,}75, 1] \end{cases}$$

   b. $u(x) = x$, mientras

$$v(y) = \begin{cases} 3y & \text{para } y \in [0, 0{,}2], \\ 0{,}5 + 0{,}5y, & \text{para } y \in [0{,}2, 1] \end{cases}$$

III. Modelos de Negociación No-Cooperativa

Los modelos cooperativos de negociación que estudiamos en la sección anterior, al no hacer explícita la forma en que se desarrolla la negociación entre los agentes, no permiten entender cómo se alcanza el acuerdo prescrito. Ståhl [1972] y Rubinstein [1982] abordaron este problema asumiendo un juego secuencial en el que, en cada etapa, le correspondía a uno de los jugadores el turno de proponer alguna repartición del objeto en cuestión, e inmediatamente el otro debería decidir entre aceptar o rechazar tal propuesta; en caso de que alguna oferta fuera aceptada el juego terminaba, mientras que si un jugador rechazaba una oferta, sería su turno de hacer una contraoferta; el juego continuaba, entonces, hasta alcanzar un acuerdo, o se jugaba infinitamente a través de sucesivos desacuerdos.

A continuación presentamos los conceptos básicos acerca de la caracterización de las preferencias de los jugadores en un juego de negociación no-cooperativa y posteriormente mostramos los dos enfoques principales para analizar este tipo de juegos.

Para especificar un modelo de negociación por etapas, asumamos dos jugadores, $N = 1, 2$, y normalicemos el objeto de la negociación de tal forma que los posibles acuerdos sean del tipo $(k, 1-k)$, donde k es la participación del objeto de la negociación que corresponde al jugador 1. Sea F el conjunto de tales posibles acuerdos. El juego se desarrolla a través de un conjunto (posiblemente infinito) de etapas $T = 0, 1, 2, ...$ Diremos que al jugador 1, por ser el primero en ofrecer, le corresponde hacer ofertas $(x, 1-x)$ en las etapas pares, mientras que el jugador 2 hace ofertas $(1-y, y)$ en las etapas impares. Al igual que antes, el punto de desacuerdo está dado por d. Para cada jugador i establecemos una relación de preferencia $\succsim_i$ sobre el conjunto de pares $(k, t) \in (F \times T) \cup \{d\}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. *Estacionareidad de las preferencias*:
   Para todo $x \in F$, $t \in T$:
   $(x, t) \succsim_i (\hat{x}, t+1)$ si y sólo si $(x, 0) \succsim_i (\hat{x}, 1)$, y
   $(x, t) \succsim_i (\hat{x}, t)$ si, y sólo si, $(x, 0) \succsim_i (\hat{x}, 0)$

2. *Tiempo costoso*:
   $(x, t) \succsim_i (x, t+1)$ para todo $t \in T, x \in F, i = 1, 2$, con preferencia estricta si $(x, 0) \succ_i d$.

3. *No deseabilidad de desacuerdo*:
   $(x, t) \succsim_i d$ para todo $t \in T, x \in F$

4. *Continuidad de las preferencias*:
   Si $x_n \in F, y_n \in F$ para todo n, $\{x_n\}$ converge a $x \in F$, $\{y_n\}$ converge a $y \in F$, y $(x_n, t) \succsim_i (y_n, s)$ para todo n, entonces $(x, t) \succsim_i (y, s)$.

Las condiciones anteriores garantizan que existe una función de utilidad continua $\delta_i^t u_i(x)$ tal que $(x, t) \succsim_i (\hat{x}, s)$ si, y sólo si, $\delta_i^t u_i(x) \geq \delta_i^s u_i(\hat{x})$. (Kreps [1990]). Además de lo anterior asumimos:

5. *No-Redundancia:*
   Existe un único par de acuerdos (x^*, y^*) para los cuales $(x^*, 1) \sim_1 (y^*, 0)$, $(y^*, 1) \sim_2 (x^*, 0)$, y ambos (x^*, y^*) son eficientes.

De forma similar a los demás juegos "dinámicos" que hemos estudiado, en un juego de negociación, una estrategia para el jugador i consiste en una "regla de oferta y aceptación" que establece una propuesta para cada etapa en la que i debe proponer una repartición, y la especificación de las condiciones bajo las cuales acepta o no una oferta de su oponente. Con base en lo anterior, notemos que en un juego de este tipo existen infinitos equilibrios de Nash; por ejemplo, la estrategia del jugador 1 podría consistir en ofrecer siempre una repartición $(1, 0)$, aceptar $(1-y, y)$ si, y sólo si, $y = 0$, y rechazar cualquier otra oferta; por su parte, la estrategia del jugador 2 podría consistir en aceptar cualquier oferta y ofrecer siempre $(1, 0)$. Dada esta combinación de estrategias, ninguno de los jugadores tendría incentivos unilaterales a desviarse. Sin embargo, un equilibrio de Nash como este no es perfecto en subjuegos ya que se sustenta en la "amenaza" del jugador 1 de rechazar cualquier oferta para la que $x < 1$. Sin embargo si, por ejemplo, en la etapa cero, el jugador 2 rechaza la oferta del jugador 1 y, seguido a esto, propone $(\hat{x}, 1-\hat{x})$ tal que $u(\hat{x}) \geq \delta_1 u(x^*)$, donde x^* es lo máximo que el jugador 1 podría ganar en la etapa 1, este último debería aceptar tal oferta; por lo tanto, esta combinación de estrategias de equilibrio de Nash no es perfecta en subjuegos. Al igual que antes, una solución satisfactoria a un juego de negociación no-cooperativo debe excluir aquellos equilibrios basados en amenazas no-creíbles; esto es, buscamos un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego de negociación.

A. El Modelo de Ståhl [1972]

El enfoque desarrollado por Indahl Ståhl [1972] para atacar el problema de negociación no-cooperativa consiste, inicialmente, en asumir que la negociación debe llevarse a cabo en un número finito de etapas T previamente determinado y, posteriormente, analizar el comportamiento de las ofertas de equilibrio cuando T tiende a infinito; esto último captura la idea de que el tiempo límite de la negociación puede ser indefinido. Para esto se asume una tasa de descuento exógena e igual para los dos jugadores, así como una función de utilidad lineal en la participación del objeto a negociar; es decir, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, y $u_i(k) = k$ para $i = 1, 2$, $k \in [0, 1]$.

Analicemos, entonces, el comportamiento de equilibrio en el juego con T finito. Para esto, asumamos inicialmente que T es un número par; como el jugador 1 es quien propone una repartición en la etapa cero, será también el último en proponer; además, una vez llegada la etapa T, el jugador 1 podría no ofrecerle nada al jugador 2, quedarse con todo el objeto restante de la negociación, y la condición de perfección en subjuegos indicaría que el jugador 2 aceptaría tal propuesta y los pagos serían $(\delta^T, 0)$. Sin embargo, previendo este comportamiento, en la etapa $T-1$ el jugador 2 podría ofrecerle δ^T al jugador 1 y obtener $\delta^{T-1} - \delta^T$ para sí; es decir, la repartición sería de la forma $(\delta^T, (\delta^{T-1}(1-\delta)))$. Con un argumento similar, en $T-2$ el jugador 1 podría haberle ofrecido $\delta^{T-1}(1-\delta)$ al jugador 2, con lo que éste aceptaría, y se alcanzaría una repartición de la forma $(\delta^{T-2}(1-\delta+\delta^2), \delta^{T-1}(1-\delta))$. Continuando con el mismo razonamiento, encontramos que en $T = 0$ la repartición que el jugador 1 propondría es:

$$\big((1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + ... + \delta^T), (\delta(1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + ... - \delta^{T-1}))\big)$$

lo cual, teniendo en cuenta la condición $\delta < 1$, es:

$$\left(\frac{1 + \delta^{T+1}}{1 + \delta}, \frac{\delta(1 - \delta^T)}{1 + \delta}\right)$$

Notemos que esta propuesta de equilibrio en la primera etapa de parte del jugador 1 depende de la tasa de descuento intertemporal δ, y del número de etapas en las cuales debe llevarse a cabo la negociación. Tal como dijimos antes, calculemos el límite de tales ofertas cuando $T \to \infty$. Notemos que en tal caso la solución es:

$$\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$$

Antes de analizar este resultado, consideremos el otro caso posible; esto es, que el número máximo de etapas en que se debe desarrollar la negociación T es impar; solucionando nuevamente por inducción hacia atrás, el jugador 2 es el último en proponer una repartición, luego ofrecería $(0, \delta^T)$; sin embargo, en $T-1$ el jugador 1 podría proponer $(\delta^{T-1}(1-\delta), \delta^T)$, con lo que el jugador 2 aceptaría. De igual forma, en $T-2$ el jugador 2 podría proponer $(\delta^{T-1}(1-\delta), \delta^{T-2}(1-\delta+\delta^2))$. Continuando de la misma forma, encontramos que en el período cero, el jugador 1 debería proponer una repartición

$$\big((1-\delta+\delta^2-...-\delta^T), (\delta(1-\delta+\delta^2-...+\delta^{T-1}))\big)$$

y como $\delta < 1$, esto es igual a

$$\left(\frac{1-\delta^{T+1}}{1+\delta}, \frac{\delta(1+\delta^T)}{1+\delta}\right)$$

similarmente a lo que ocurría antes, cuando $T \to \infty$ la oferta óptima del jugador 1 en la primera etapa es

$$\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right) \tag{1}$$

y el jugador 2 decide aceptar.

Para establecer el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos debemos especificar un plan de acción (regla de oferta y aceptación) para cada contingencia que pueda alcanzar el juego. Esto es, la oferta $(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$ por parte del jugador 1, y la posterior aceptación de parte del jugador 2, solo constituyen las elecciones óptimas *en la trayectoria de equilibrio*. Sin embargo, también debemos especificar las estrategias de los jugadores *fuera de la trayectoria de equilibrio*. Notemos, no obstante, que como el juego es de horizonte infinito, la caracterización que hicimos puede extenderse a cualquier etapa, idependientemente de que esta sea o no la primera; es decir, todos los subjuegos independientemente de la etapa en la que comiencen, son “isomórficos”, luego en cualquier caso el primer jugador en ofrecer debe proponer la repartición de acuerdo con la ecuación (1), y su oponente debe rechazar cualquier oferta en la que se le asigne menos de lo establecido allí.

Notemos, en este resultado, que el jugador 1 tiene una ventaja sobre el jugador 2, lo que significa que *quien tome la iniciativa en la negociación puede hacerle una* *oferta suficientemente atractiva a su oponente de tal forma que éste acepte y, aun así, la repartición sea favorable para aquél.* Vale la pena recordar en esta instancia que hemos asumido información completa en la negociación, lo que en este caso significa conocimiento común de la valoración del objeto a negociar así como de la tasa de descuento. Finalmente, notemos que en la medida en que ambos jugadores sean suficientemente pacientes (δ cercano a 1), la repartición será más igualitaria; la explicación de esto es que si los jugadores son demasiado impacientes (δ pequeño) el primer jugador en ofrecer puede aprovechar tal circunstancia, y proponer una repartición suficientemente asimétrica y, aun así, dada la impaciencia de su oponente, éste preferiría aceptar que no hacerlo.

B. El Modelo de Rubinstein [1982]

A diferencia de Ståhl, Rubinstein [1982] atacó directamente el problema de negociación sin un límite de etapas previamente establecido y con cualquier conjunto de preferencias que satisficieran las condiciones mencionadas previamente, y de esta forma generalizó el resultado presentado por Ståhl. El siguiente teorema, extractado de su artículo de 1982, muestra la metodología propuesta.

Teorema 6 (Rubinstein [1982])**.**
Un problema de negociación de ofertas alternadas tiene un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos donde (x^*, y^*) es el único par de acuerdos eficientes para los cuales

$$\delta_1 u_1(x^*) = 1 - u_1(y^*)$$

$$\delta_2 u_2(y^*) = 1 - u_2(x^*)$$

En el equilibrio, el jugador 1 propone x^*, acepta y^* y toda propuesta y para la cual $u_1(y) > u_1(y^*)$, y rechaza toda propuesta y para la cual $u_1(y^*) > u_1(y)$. El jugador 2 siempre propone y^*, acepta x^* y toda propuesta x para la cual $u_2(x) > u_2(x^*)$, y rechaza toda propuesta x para la cual $u_2(x^*) > u_2(x)$.

Demostración.
Ver Osborne y Rubinstein [1994]. □

Como un ejemplo del teorema de Rubinstein, supongamos que se disputa \$1, que $u_i(k) = k$ para $i = 1, 2$ y que los factores de descuento son δ_1 y δ_2 para 1 y 2 respectivamente. Las ofertas que constituyen el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos son, entonces, el par x^*, y^* que solucionan:

$$\delta_1 x^* = 1 - y^*$$
$$\delta_2 y^* = 1 - x^*$$

es decir,

$$x^* = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}; \qquad\qquad 1-x^* = \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}$$

$$y^* = \frac{1-\delta_y}{1-\delta_1\delta_2}; \qquad\qquad 1-y^* = \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$$

Algunas conclusiones se pueden extraer de este resultado. Si los factores de descuento son iguales para ambos jugadores, obtenemos nuevamente el resultado del modelo de Ståhl si el número de etapas en el que éste se desarrolla tiende al infinito; con esto saca mayor partido de la negociación el primero de los agentes en hacer una oferta. Si mantenemos la diferencia en los factores de descuento, al depender la ganancia de cada uno de ambas tasas de descuento, por ejemplo, cuando 2 es muy impaciente ($\delta \to 0$), 1 obtiene una mayor parte del objeto. En general, la ganancia de cada uno de los jugadores es creciente en su factor de descuento (paciencia) y decreciente en el factor de descuento de su rival.

Por otro lado, observemos que si $\delta_1 = \delta_2 = 1$ la solución de negociación es indeterminada; es decir, si ninguno de los jugadores considera costoso el proceso de negociación (ofertas y contraofertas) no se puede concluir nada acerca de un acuerdo, salvo que los jugadores permanecerían regateando indefinidamente. Sin embargo, resulta natural asumir $\delta < 1$ para ambos jugadores, aunque seguramente diferentes entre sí. En una guerra, por ejemplo, es preferible alcanzar un acuerdo hoy que el próximo año, ya que a medida que pasa el tiempo las pérdidas humanas y materiales se hacen mayores. De igual forma, al interior de una empresa, es preferible detener la huelga cuanto antes ya que el paso del tiempo perjudica a empresarios y trabajadores indiscriminadamente. Luego la solución al problema que existe cuando a ambas partes les cuesta negociar estará determinada por la relación entre los factores de descuento de estas. De esta forma, la negociación "penaliza" la impaciencia y "premia" al primero en ofrecer.

C. Evidencia Experimental

Como mencionamos anteriormente, se ha encontrado que en los experimentos sin barreras a la comunicación los resultados no sólo son eficientes sino que, casi en su totalidad, son simétricos (Hoffman y Spitzer [1982, 1985]). Sin embargo cuando la comunicación es restringida y el juego se estructura un poco más de tal forma que en una primera etapa uno de los jugadores debe hacer una oferta al otro, el cual a su vez decide si acepta la oferta (realizándose la repartición) o si no acepta (obteniendo cada uno un pago de cero), los resultados varían con respecto al caso anterior, y se encuentran en dirección diferente a la marcada por la teoría. Según lo visto, el jugador 1 podría reclamar para sí el 99 % del dinero, y el otro debería aceptar, dado que tener el 1 % es preferible a no tener nada. Sin embargo, la evidencia sugiere que las ofertas del jugador 1 oscilan alrededor de una repartición 70 %-30 % y que en un 20 % de los casos se alcanza el punto de desacuerdo (Guth, Schmittberger y Schwarz [1982]). Esto ha generado diferentes explicaciones, desde el cuestionamiento de la teoría de juegos como herramienta con capacidad de predicción (en particular el concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos), hasta la aparición de propuestas como una "teoría del comportamiento de justicia distributiva". En primera instancia aparece como explicación el argumento (bastante intuitivo) de que los jugadores "tratan de ser justos". Sin embargo, resultados de una serie de experimentos (Ochs y Roth [1989]) han mostrado que si se modifica el juego del ultimátum por uno de dictador (donde un jugador decide cómo debe ser la repartición y el otro no puede decidir nada), los resultados son reparticiones mucho menos "altruistas" que las del juego del ultimátum; así, dado que se incorporan criterios distribucionales en la función de utilidad de cada jugador, se puede entender que los jugadores 1 del juego del ultimátum incorporan esta creencia a la hora de elegir su estrategia.

IV. Modelo de Negociación Gradual

Como mencionamos en la introducción, en algunos problemas de negociación las partes pueden acordar "repartir" el objeto de la negociación *gradualmente* con el propósito de ganar confianza conforme el proceso se lleva a cabo; o cuando el problema consta de varios puntos "separables", atacarlos uno a uno en etapas diferentes; en estos casos, el objeto mismo que se negocia está en permanente expansión. Los beneficios que obtiene una firma, por ejemplo, cambian período tras período, de tal forma que los acuerdos entre accionistas, acerca de la repartición de estos, deben revisarse periódicamente. De forma similar, una firma y su sindicato podrían preferir negociar secuencialmente cada uno de los puntos del pliego de peticiones de este último, e ir pasando a los puntos siguientes conforme se van estableciendo acuerdos parciales. Estos dos tipos de casos se refieren a *problemas de negociación en los cuales el conjunto de acuerdos posibles no es fijo, sino que se expande gradualmente.*

Entendemos entonces un problema de negociación gradual como un proceso a través del tiempo en el cual las posibilidades de negociación de los agentes se expanden o se contraen, determinando lo que en adelante llamaremos una *agenda de negociación*, y que ahora definimos formalmente:

Definición 3. (Agenda de Negociación)
Una *agenda de negociación* es un par de funciones (H, F),

$$H : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}, \qquad F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2_+$$

tales que, para todo $t \in \mathbb{R}_+, F_t$ es el conjunto de negociación

$$F_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | H(x, y) \leq t\}$$

Se asumirá que:

1. H es continua, diferenciable con continuidad, creciente en x, y y convexa[10].

[10] H es convexa en $\mathbb{R}^2_+$ si para todo $x, y \in \mathbb{R}^2_+$ y $\lambda \in [0, 1], H(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda H(x) + (1-\lambda)H(y)$.

2. F es monótona creciente en t: si $t \leq t'$ entonces $F_t \subseteq F_{t'}$.

Definición 4. (Problema de Negociación Gradual)
Un *problema de negociación gradual* es una tripla (H, F, d) que consiste en una agenda de negociación (H, F) y un punto de desacuerdo $d \in \mathbb{R}^2_+$.

Ejemplo 8.
Consideremos $H(x, y) = x^2 + y^2$, para todo $x, y \geq 0$; $d = (0, 0)$; y asumamos que el proceso de negociación se subdivide de tal forma que el conjunto de acuerdos posibles en cada momento $t \in \mathbb{R}_+$ está dado por:

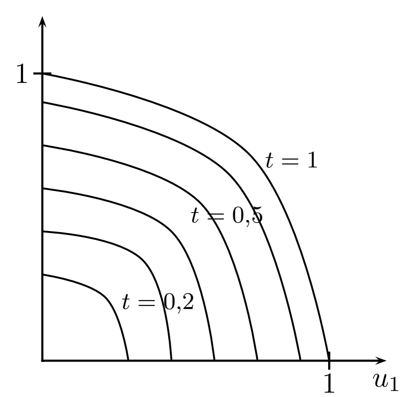
$$F_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | H(x, y) \leq t\}$$

Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} F_{t=0,2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | x^2 + y^2 \leq 0{,}2\} \\ F_{t=0,5} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | x^2 + y^2 \leq 0{,}5\} \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ F_{t=1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Estos conjuntos pueden verse en la figura 14.

Figura 14: Problema de Negociación Gradual



△

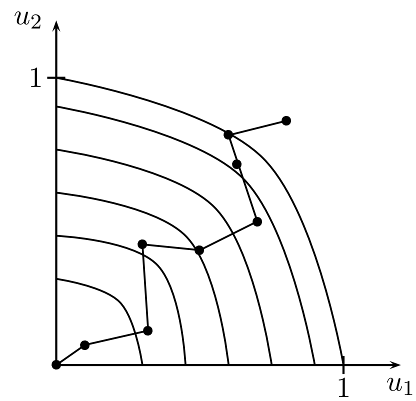
Habiendo especificado ya un problema de negociación gradual, *una solución gradual de negociación es una regla que especifica una asignación de utilidades para cada uno de los agentes en cada momento del tiempo*; es decir, al estarse expandiendo el conjunto de negociación, la solución consiste en una trayectoria que determina los pagos en cada instante.

Definición 5. (Solución Gradual de Negociación)
Una *solución gradual de negociación* del problema de negociación gradual (H, F, D) es una trayectoria diferenciable

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_+ \to & \mathbb{R}_+^2 \\ t \to & \phi(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

tal que $\phi(t) \in F(t)$ para todo t.

Figura 15: Solución Gradual de Negociación



Establezcamos ahora las condiciones que se desearía que satisficiera una solución gradual $\phi(t)$. Redefinimos los axiomas de eficiencia y simetría para un contexto gradual, e incluimos también el de independencia ante transformaciones *monótonas*.

Axioma 8. (Eficiencia)
Toda solución gradual de negociación $\phi(t)$ es *eficiente*; esto es, en cada momento $t \in \mathbb{R}_+$, $\phi(t) = (x(t), y(t)) \in \partial F_t$.

Axioma 9. (Simetría)
Si $H(x, y) = H(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, entonces para toda solución gradual de negociación $\phi(t) = (x(t), y(t))$ se tiene que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

De forma análoga al caso clásico, el axioma de simetría establece que si alcanzada cualquier etapa el conjunto factible es simétrico, ambos jugadores deben recibir lo mismo *en cada instante del tiempo*.

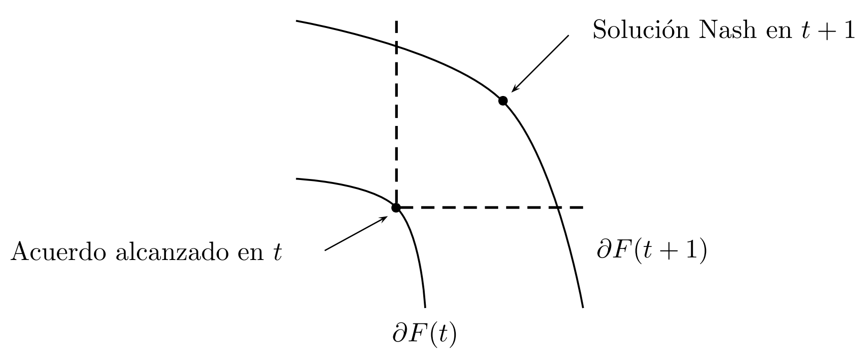
Axioma 10. (Independencia ante transformaciones monótonas)
Sean (H, F, d) y $(\hat{H}, F, d)$ dos problemas de negociación gradual tales que $H(x, y) = \hat{H}[A(x), B(y)]$, donde A y B son dos transformaciones crecientes $A, B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, con $A(0) = B(0) = 0$. Si $\phi(t) = [x(t), y(t)]$, y $\hat{\phi}(t) = [\hat{x}(t), \hat{y}(t)]$ son soluciones graduales de negociación para (H, F, d) y $(\hat{H}, F, d)$, respectivamente, entonces $\hat{x}(t) = A[x(t)]$ e $\hat{y}(t) = B[x(t)]$.

De forma similar al axioma de invarianza escalar, lo que establece el axioma 10 es que si el conjunto de negociación se modifica a través de cualquier transformación monótona, la solución al nuevo problema de negociación es la misma solución inicial, modificada a través de la misma transformación. Nótese la diferencia entre los dos axiomas: este último permite *cualquier tipo de transformación creciente*, y no únicamente transformaciones *lineales* como el axioma de invarianza escalar.

A modo de ilustración centrémonos, por un momento, en la situación en que el conjunto de valores que puede tomar t es *contable*, lo que equivale a decir que las posibilidades de negociación se expanden de forma *discreta*. Así, establecemos en cada período un problema de negociación clásico en el cual el punto de desacuerdo es la asignación establecida en el período inmediatamente anterior. Para la repartición del nuevo objeto de la negociación podemos recurrir a varios "esquemas de arbitraje". A continuación se presentan algunos de estos.

Esquema de Arbitraje Nash
Cada porción adicional del objeto de la negociación se reparte de acuerdo con la solución Nash de negociación (figura 16).

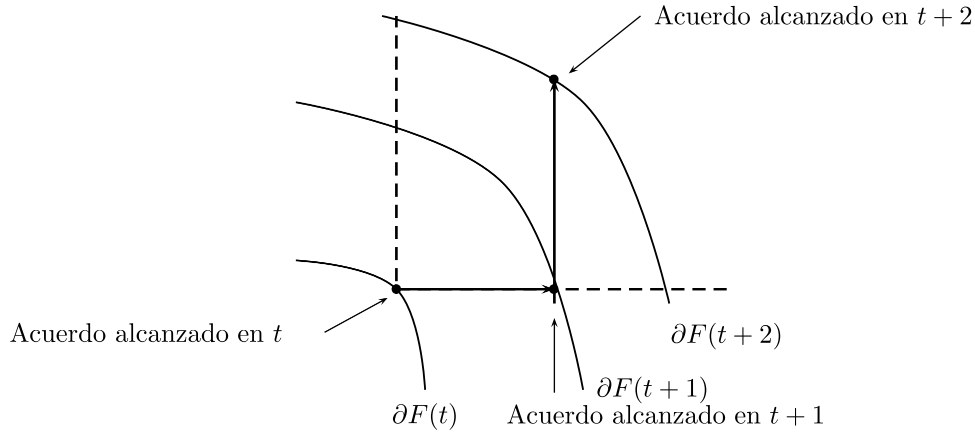
Figura 16: Esquema de Arbitraje "Nash en cada etapa"



Esquema de Arbitraje por Turnos
Cada porción adicional del objeto de la negociación le corresponde en su totalidad a un jugador previamente escogido. En la etapa siguiente le corresponde al otro jugador, y así sucesivamente. En la figura 17 puede observarse un ejemplo en el cual en la etapa $(t+1)$ toda la expansión del conjunto le corresponde al jugador 1, y en la etapa $(t+2)$ le corresponde al jugador 2.

Es interesante notar que, independientemente de la forma en que se "repartan" las ganancias originadas a partir de las expansiones del conjunto de negociación, *siempre y cuando estas expansiones sean lo suficientemente pequeñas*, las soluciones graduales satisfacen cierta propiedad en común. Para ver esto fácilmente podemos

Figura 17: Esquema de Arbitraje "por Turnos"



empezar tomando un problema de negociación clásico $(F,(0,0))$ que fragmentamos en k partes de tamaño $\delta > 0$ cada una. Así, (H,F,d) determina los problemas $F_\delta, F_{2\delta}, \ldots, F_{k\delta} = F_1$. Consideremos entonces que ya se ha alcanzado un acuerdo en la etapa j-ésima y que se está interesado en negociar la etapa $(j+1)$-ésima. A partir del axioma de eficiencia, sabemos que en la etapa j-ésima el acuerdo alcanzado pertenece a la frontera del conjunto disponible en esa etapa; esto es, la solución debe especificar en j, $H(x,y) = j\delta$. De igual forma, el acuerdo en la etapa siguiente debe ser un punto $x + \Delta x, y + \Delta y$ tal que en $(j+1)$:

$$H(x + \Delta x, y + \Delta y) = (j+1)\delta$$

Podemos tomar una aproximación de Taylor de primer orden al lado izquierdo de la expresión anterior, de la siguiente forma:

$$H(x + \Delta x, y + \Delta y) \simeq H(x,y) + H_x(x,y)\Delta x + H_y(x,y)\Delta y$$

Reemplazando la condición de eficiencia que se acaba de mencionar, en cada una de las etapas obtenemos que:

$$(j+1)\delta \simeq j\delta + H_x(x,y)\Delta x + H_y(x,y)\Delta y$$

es decir,

$$H_x(x,y)\Delta x + H_y(x,y)\Delta y \simeq \delta \tag{$\star$}$$

Esta condición será la restricción que se enfrentará al solucionar el problema de la etapa $(j+1)$.

Apliquemos ahora cada uno de los esquemas de arbitraje mencionados arriba:

Esquema de Arbitraje Nash
En este esquema, al igual que en el caso clásico, se busca maximizar el producto de las utilidades de los agentes en cada etapa. Así, tenemos el problema

$$\begin{aligned} &\max_{\Delta_x \Delta_y} \quad \Delta x \Delta y \\ &\text{s.a:} \;\; H_x(x,y)\Delta x + H_y(x,y)\Delta y = \delta \end{aligned}$$

Despejando Δ_x en la ecuación ($\star$) obtenemos

$$\Delta x \simeq \left[\frac{\delta - H_y \Delta y}{H_x}\right] \tag{3}$$

con lo que si la solución de Nash maximiza la expresión

$$\left[\frac{\delta - H_y \Delta y}{H_x}\right] \Delta y$$

con respecto a Δ_y, obtenemos $\dfrac{\delta}{H_x} = 2\dfrac{H_y}{H_x}\Delta y$
luego $\Delta y = \dfrac{\delta}{2H_y}$ y, de (3),

$$\Delta x \simeq \frac{\delta}{2H_x}$$

con lo que haciendo $\Delta_x, \Delta_y \to 0$ (y, por tanto, $\delta \to 0$), obtendremos la ecuación diferencial $dy/dx = H_x/H_y$.

Esquema de Arbitraje por Turnos
Bajo este esquema de arbitraje, en la etapa $j+1$ el objeto de la negociación se expande en δ y esta cantidad la recibe en su totalidad el jugador 1. En la etapa $j+2$ la expansión es también de δ pero la recibe el jugador 2. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} &\text{en } (j+1): &\quad H(x+\Delta x, y) &= H(x,y) + \delta \\ &\text{en } (j+2): &\quad H(x+\Delta x, y+\Delta y) &= H(x,y) + 2\delta \end{aligned}$$

y, por el teorema de Taylor,

$$H(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq H(x,y) + H_x(x,y)\Delta x + H_y(x,y)\Delta y$$

luego, a partir de estas dos últimas expresiones tenemos

$$H_x(x,y)\Delta x + H_y(x,y)\Delta_y = 2\delta \tag{4}$$

Si $\Delta y = 0$, como en la etapa $(j+1)$, tenemos

$$H(x+\Delta x, y) \simeq H(x,y) + H_x(x,y)\Delta x$$

o, lo que es lo mismo,

$$H(x,y) + \delta \simeq H(x,y) + H_x(x,y)\Delta x$$

luego $H_x \Delta x \simeq \delta$, y entonces, a partir de (4), $H_y \Delta y \simeq \delta$.

De esta forma $\dfrac{H_x(x,y)\Delta x}{H_y(x,y)\Delta y} \simeq 1$, con lo que, haciendo $\Delta_x, \Delta_y \to 0$, obtenemos nuevamente la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_x}{H_y}$$

Para destacar el papel de esta expresión, introducimos la siguiente definición.

Definición 6. (Solución Nash Gradual)
Una *solución Nash gradual* (SNG) es una solución gradual de negociación $\phi(t) = (x(t), y(t))$ tal que a cada problema de negociación gradual (H, F, d) le asigna una solución a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_x}{H_y}$$

De acuerdo con esta solución gradual de negociación, en cada etapa la repartición del objeto de la negociación favorece al jugador "más necesitado", donde el grado de necesidad se determina por la relación marginal de sustitución entre la utilidad de los dos jugadores; esto es, el número de "útiles" a los cuales debe renunciar el jugador 2, para que el jugador 1 incremente su utilidad en un útil, manteniéndose en el mismo conjunto de posibles acuerdos.

Resulta importante destacar la diferencia entre la solución Nash de negociación y la solución Nash gradual: esta última favorece al jugador más necesitado, mientras la primera favorece al más dispuesto a asumir riesgos.

Nótese que como la frontera dada por H es suave y estrictamente creciente en x e y, la SNG establece *una única trayectoria de solución.* Para determinar el valor exacto que toma la función en cada período, recurrimos al axioma de eficiencia $(H[x(t), y(t)] = t)$; es decir, la solución se encuentra en la frontera del conjunto factible en cada momento del tiempo.

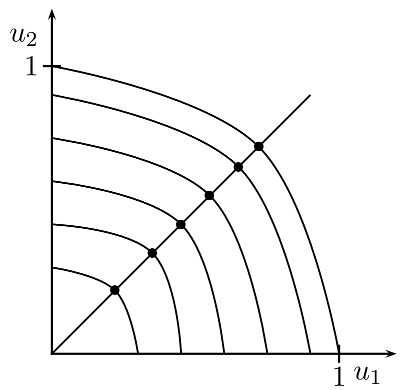
Teorema 7 (Wiener y Winter [1999])**.**
Existe una única solución gradual que satisface los axiomas de eficiencia, simetría e independencia ante transformaciones monótonas. Tal solución es la solución Nash gradual (SNG).

Demostración.
Ver Wiener y Winter [1999]. □

Ejemplo 9.
Encontremos la solución Nash gradual para el ejemplo anterior. Puesto que $\dfrac{dy}{dx} =$

$\dfrac{H_x(x,y)}{H_y(x,y)}$ entonces $\dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{2x}{2y}$; luego $y = x$, para todo t. Esto lo podemos ver en la figura 18.

Figura 18: Ejemplo 9



△

La solución de este problema ($y = x$ para todo t) era de esperarse, dado que el juego es simétrico en todo momento. Sin embargo, consideremos ahora un ejemplo en el cual esto deje de ser así, y analicemos las características particulares de la solución.

Ejemplo 10.
Sea (H, F, d) un problema de negociación gradual dado por

$$\begin{aligned} &F_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ | H(x,y) \leq t\}, \\ &H(x,y) = 2x^2 + y \\ &d = (0,0) \end{aligned}$$

Esto puede interpretarse como un problema de negociación gradual en el que, en las primeras etapas, el pago máximo posible del jugador 1 es mayor que el del jugador 2, pero a partir de $t = 0{,}5$ es el jugador 2 quien tiene un pago máximo posible mayor; es decir, el jugador 1 es el más necesitado antes de $t = 0{,}5$ y el menos necesitado a partir de ahí.

Para hallar la SNG correspondiente, es necesario hacer

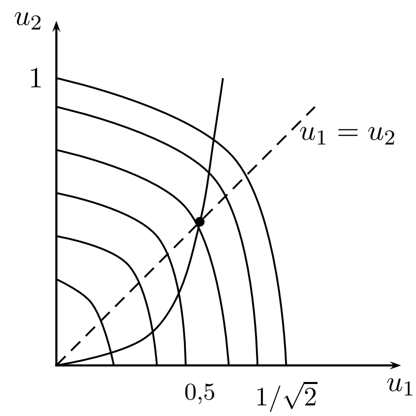
$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_x(x,y)}{H_y(x,y)}$$

lo que equivale a decir

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, obtenemos $y = 2x^2$ (figura 19).

Figura 19: Ejemplo 10



La tasa marginal de sustitución entre el bienestar de los dos jugadores es, en este ejemplo, igual a $4x$. Esto equivale a decir que antes de que $x = 0{,}25$, por ser 1 el jugador más necesitado, la expansión del conjunto lo favorece, mientras que a partir de ese punto, favorece al jugador 2; es decir (como ya se sabía), la SNG siempre favorece al jugador más necesitado (Figura 19).

△

Ejercicios 2.

1. Considere el ejemplo 9. Encuentre (si existe) la diferencia que existe entre la solución Nash de negociación cuando $t = 10$ y la solución Nash gradual hasta $t = 10$.

2. Suponga ahora que el conjunto de negociación se divide en dos: uno hasta $t = 5$ y otro de $t = 6$ hasta $t = 10$. Contraste los resultados de la solución gradual con los de las dos soluciones Nash de negociación que se encontrarían en caso de resolver dos problemas por aparte. Suponga ahora que el conjunto se divide en tres. Tenga en cuenta que en cada problema de negociación el punto de desacuerdo es el acuerdo de la etapa anterior.

3. Explique las diferencias que se encuentran.